FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 11-12-2007 **Compito D**

I)Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_4,\ x_1 + x_2 - 2x_4,\ x_2 + x_3 + 2x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di equazione $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap \mathrm{KerT}$.

II) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{aligned} 2x + ky + z &= 1 \\ x + 4y + 2z &= 2 \\ x + 4y + kz &= 2. \end{aligned}$$

III) In R^3 sono dati i punti P(0,-1,3) , Q(2,0,2) e il piano π: $2x + 3y + z = 0$.

Determinare:
a) la retta s passante per P e per Q;
b) la retta passante per P e perpendicolare a π;
c) i piani per P e perpendicolari a π;
d) le rette passanti per Q parallele a π;
e) la distanza di P da Q;
f) se la retta s (del punto a)) è incidente o parallela o contenuta in π.

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

I)

a) $T=\begin{pmatrix} 1,2,0,3 \\ 1,1,0,-2 \\ 0,1,1,2 \end{pmatrix}$ T: $\boldsymbol{R}^4 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$. Non può essere iniettiva (perché?)

b) KerT $=\{x_1+2x_2+3x_4=0,\ x_2+5x_4=0,\ x_3-3x_4=0\}$, dim(KerT)=1, una base = ${}^t(7,-5,3,1)$.
La rappresentazione parametrica di KerT è ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^t(7\lambda, -5\lambda. 3\lambda, \lambda)$.

c) Dim(ImT)=3 ➔ ImT=$\boldsymbol{R}^3$, una base le prime tre colonne di T o la base canonica di $\boldsymbol{R}^3$.

d) T è suriettiva. Non è iniettiva.

e) U ha dim=3, una base è $\{\mathbf{u}_1 = {}^t(1,0,0,1),\ \mathbf{u}_2 = {}^t(0,0,1,0),\ \mathbf{u}_3 = {}^t(2,-1,0,0)\}$.
Un sistema di generatori di T(U) è $\{T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), T(\mathbf{u}_3)\}$.
$T(\mathbf{u}_1) = {}^t(4, -1, 2)$, $T(\mathbf{u}_2) = {}^t(0,0,1)$, $T(\mathbf{u}_3) = {}^t(0,1,1)$. Siccome questi tre vettori sono linearmente indipendenti, T(U) ha dim=3 e coincide col codominio $\boldsymbol{R}^3$ di T.

f) Il complemento ortogonale di ImT è il sottospazio nullo di $\boldsymbol{R}^3$.

g) $U \cap$ KerT si determina nel modo più rapido sostituendo le equazioni parametriche di KerT nell'equazione cartesiana di U. si trova $\lambda=0$ e perciò $U \cap \text{KerT} = \{\mathbf{0}\}$.

II) Per k=8 il sistema è incompatibile. Per k=2 il sistema ha ∞^1 soluzioni: $x=0$, $y=\lambda$, $z=1-2\lambda$.
Per k diverso da 8 e da 2 il sistema è determinato: $x=(4-2k)/(8-k)$, $y=3/(8-k)$, $z=0$.

III)

a) Retta s=PQ: $\{x = 2t,\ y = -1+t,\ z = 3-t\}$.

b) Retta p: $\{x = 2k,\ y = -1+3k,\ z = 3+k\}$

c) I piani per P perpendicolari a π sono ∞^1 (formano un fascio di asse la retta p).
L'equazione del loro fascio è $a(x-2z+6)+b(y-3z+10) = 0$.
Alternativamente, si impone ai piani della stella di centro P di avere il vettore normale ortogonale al vettore normale di π: $(a,b,c).{}^t(2,3,1) = 0$.
Si ottiene $ax+b(y+1)+c(z-3)=0$, con $2a+3b+c=0$.

d) Il quesito: rette per Q parallele a π. Il quesito è strutturalmente analogo al precedente:
Stella di rette di centro Q:$\{2+lk,\ y=mk,\ z=2+nk\}$ col vincolo $2l+3m+n=0$.
Le rette formano un fascio di centro Q giacenti nel piano per Q parallelo a π.

e) $[d(P,Q)]^2 = 6$.

f) Siccome P appartiene a π mentre Q no, la retta s=PQ è incidente a π nel punto P, ma non è parallela al piano π (è inutile dire che non giace su π).

IV)

a) Autovalori $\lambda=0$ con m.a.=1, $\lambda=1$ con m.a.=2, $\lambda=3$ con m.a.=1.

b) Autospazi. U_0, dim=1, base=$\{{}^t(1,0,1,0)\}$; U_3, dim=1, base=$\{{}^t(1,0,0,0)\}$;
U_1, dim=2, una base=$\{{}^t(0,0,0,1), {}^t(21,2,14,0)\}$.

c) A è diagonalizzabile (le molteplicità geometriche degli autovalori sono uguali alle molteplicità algebriche):

$$D=\begin{pmatrix} 3,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,1,0 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \quad \text{e la matrice diagonalizzante è} \quad P=\begin{pmatrix} 1,1,0,21 \\ 0,0,0,2 \\ 0,1,0,14 \\ 0,0,1,0 \end{pmatrix}.$$

(Attenzione all'ordine delle colonne).