FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 11-12-2007 **Compito C**

I) Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 3x_2 + x_4,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_2 + x_3 + x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di equazione $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap$ KerT .

II) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{aligned} kx + 5y + 2z &= 5 \\ 2x + 7y + 3z &= 7 \\ x + 2y + kz &= 2 . \end{aligned}$$

.

III) In R^3 sono dati i punti P(-1,1,0) , Q(3,3,-2) e il piano π: $x + y + z = 0$.

Determinare:
a) la retta s passante per P e per Q;
b) la retta passante per P e perpendicolare a π;
c) i piani per P e perpendicolari a π;
d) le rette passanti per Q parallele a π;
e) la distanza di P da Q;
f) se la retta s (del punto a)) è incidente o parallela o contenuta in π.

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

I)

b) KerT: dim=2, eq. cartes. : $\{x_1+3x_2+x_4=0,\ x_2+x_3+x_4=0)\}$, base=$\{{}^t(3,-1,0,0),\ {}^t(1,0,1,1)\}$.

c) Imt: base=$\{{}^t(1,1,0),\ {}^t(1,0,1)\}$, eq. cartes.: x-y-z=0.

e) T(U)=imT.

f) Il complemento ortogonale di ImT è $\{\lambda.{}^t(1,-1,-1)\}$.

g) $U \cap$ KerT=$\{\lambda.{}^\tau(5,-2,1,1)\}$.

II) Il sistema è compatibile per ogni k. Per k=1, ∞^1 soluzioni: x=λ, y=1+λ, z=-3λ.
Per k=9/7, ∞^1 soluzioni: x=7λ, y=1+λ, z=-7λ.
Per k diverso da 1 e da 9/7 il sist. è determinato: x=0, y=1, z=0 (indipendente da k e perciò Si ritrova come soluzione particolare nei casi precedenti, per λ=0).

III) Il solito esercizio di geometria euclidea. Vedi gli altri appelli dell'11 dicembre 2007.

IV)

a) Autovalori: λ=0 di m.a.=1, λ=4 di m.a.=1, λ=7 di m.a.=2.

b) Autospazi: $U_0=\{\lambda.{}^t(5,7,0,0)\}$; $U_4=\{\mu.{}^t(5,3,0,2)\}$; $U_7=\{\alpha.{}^t(1,0,0,0)+\beta.{}^t(0,0,1,0)\}$.

c) A è diagonalizzabile:

$$D = \begin{pmatrix} 7,0,0,0 \\ 0,7,0,0 \\ 0,0,4,0 \\ 0,0,0,0 \end{pmatrix}, \text{ matrice diagonalizzante } P = \begin{pmatrix} 1,0,5,5 \\ 0,0,3,7 \\ 0,1,0,0 \\ 0,0,2,0 \end{pmatrix}.$$

Quesito aggiunto:Verificare che P è invertibile (det(P)=14) e che P^{-1} è

1	-5/7	0	-10/7
0	0	1	0
0	0	0	1/2
0	1/7	0	-3/14

Verificare che $P^{-1}.A.P = D$.