FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 11-12-2007 **Compito B**

I)Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_3 + 2x_4,\ x_1 - x_2 + x_4,\ x_2 + x_3 + x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di equazione $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap KerT$.

II) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z &= 7 \\ x + 2y + kz &= 2 \\ kx + 5y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

.

III) In R^3 sono dati i punti P(2,0,1) , Q(4,1,0) e il piano π: $x + 3y - 2z = 0$.

Determinare:
a) la retta s passante per P e per Q;
b) la retta passante per P e perpendicolare a π;
c) i piani per P e perpendicolari a π;
d) le rette passanti per Q parallele a π;
e) la distanza di P da Q;
f) se la retta s (del punto a)) è incidente o parallela o contenuta in π.

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

I)

a) Ovvio.

b) kerT: dim=2, eq. cart. $\{x_1+x_3+2x_4=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$, una base=$\{{}^t(1,1,-1,0),\ {}^t(2,1,0,-1)\}$,

c) Imt: dim=2, una base=$\{{}^t(1,1,0),\ {}^t(0,-1,1)\}$, eq. cart. x-y-z=0.

d) T non iniettiva né suriettiva.

e) T(U)=ImT.

f) Complemento ortogonale di ImT: $\{\lambda.{}^t(1,-1,-1)\}$.

g) $U \cap \mathrm{KerT} = \{\lambda.{}^t(1,-2,5,-3)\}$.

II) Per k=1 sist. indeterminato: $x=-1+\lambda,\ y=\lambda,\ z=3-3\lambda$;
per k=9/7 sist. indeterminato: $x=-7\lambda,\ y=1-\lambda,\ z=7\lambda$;
Per l diverso da 1 e da 9/7 sist. determinato: x=0, y=1, z=0 (indipendente da k).

III) E' sul tipo dell'omologo esercizio del compito A dell'11 dicembre 2007.

IV)

a) Autovalori: $\lambda=0$ di m.a.=1, $\lambda=1$ di m.a.=1, $\lambda=5$ di m.a.=2.

b) Autospazi: $U_0=\{h.{}^t(0,-2,5,0)\}$; $U_1=\{k.{}^t(2,1,-2,0)\}$; $U_5=\{a.{}^t(0,1,0,0)+b.{}^t(0,0,0,1)\}$.

c) Segue che A è diagonalizzabile :

$$D = \begin{pmatrix} 5,0,0,0 \\ 0,5,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \text{ e la diagonalizzante è } P = \begin{pmatrix} 0,0,0,2 \\ 1,0,-2,1 \\ 0,0,5,-2 \\ 0,1,0,0 \end{pmatrix}.$$