FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta dell'11-12-2007 Compito A

I) Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2 + 3x_4,\ x_1 - x_3 + x_4,\ x_2 + x_3 + 2x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di equazione $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap \mathrm{KerT}$.

II) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 2 \\ x + 4y + kz &= 2 \\ 2x + ky + z &= 1 \end{aligned}$$
.

III) In R^3 sono dati i punti P(1,0,1) , Q(3,1,0) e il piano π: $x + 2y - z = 0$.

Determinare:
a) la retta s passante per P e per Q;
b) la retta passante per P e perpendicolare a π;
c) i piani per P e perpendicolari a π;
d) le rette passanti per Q parallele a π;
e) la distanza di P da Q;
f) se la retta s (del punto a)) è incidente o parallela o contenuta in π.

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Svolgimento

I)

a) $T=\begin{pmatrix} 1,1,0,3 \\ 1,0,-1,1 \\ 0,1,1,2 \end{pmatrix}$.

b) $T \rightarrow \begin{pmatrix} 1,1,0,3 \\ 0,-1,-1,1 \\ 0,0,0,0 \end{pmatrix}$ ➔Rg(T)=dim(ImT)=2 ➔dim(KerT)=4-2=2.

Equaz. Cartesiane di KetT: $\{x_1+x_2+3x_4=0,\ x_2+x_3+2x_4=0\}$.

Posto $x_3=a$, $x_4=b$, ho: $x_2=-a-2b$, $x_1=a-b$ (Equaz. Parametriche) da cui segue una base di KetT:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) Siccome Dim(ImT)=2, una base è $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (Le prime due colonne di T).

Combinando linearmente questi due vettori con parametri a e b rispettivamente, ho le equazioni parametriche di IMT, da cui segue a=y, b=z e quindi l'equazione cartesiana di ImT:

$$x-y-z=0.$$

d) T non è né inettiva, né suriettiva (dimostrazione banale).

e) U ha equazione $x_1+2x_2-x_4=0$; Dim(U)=3 e una sua base è $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Siccome $T(U)=aT(u_1)+bT(u_2)+cT(u_3)$, trovo I corrispondenti dei tre vettori di base di U:

$T(u_1)=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T(u_2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siccome questi due vettori sono linearmente indipendenti, la dimensione di T(U) è maggiore o uguale 2, ma T(U) dovendo essere inclusa in ImT, che ha dim=2, seque che T(U) ha dimensione 2 e coincide con Im(T). Non c'è perciò bisogno di calcolare $T(u_3)$.

Equazione cartesiana di T(U) = equazione cartesiana di ImT: x-y-z=0.

f) Il complemento ortogonale H di ImT ha dim=3-2=1, e perciò (vedi equazione cartesiana di ImT) le equazioni parametriche di H sono : $\{x=\lambda,\ y=-\lambda,\ z=-\lambda\}$.

g) $U \cap$ KerT: $\{x_1+2x_2-x_4=0,\ x_1=a-b,\ x_2=-a-2b,\ x_3=a,\ x_4=b\}$ ➔ a+6b=0, per cui, posto $b=-\lambda$, segue $a=6\lambda$; dim($U \cap$ KerT)=1 e una sua base è $\{{}^t(7, -4, 6, -1)\}$.

II) La matrice del sistema è

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & |2 \\ 1 & 4 & k & |2 \\ 2 & k & 1 & |1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 4 & 2 & |2 \\ 0 & 0 & (k-2) & |0 \\ 0 & (k-8) & -3 & |-3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 4 & 2 & |2 \\ 0 & (k-8) & -3 & |-3 \\ 0 & 0 & (k-2) & |0 \end{matrix}$$

1° caso: k=2. Si hanno ∞^1 soluzioni: dalla 2° equazione (-6y-3z=-3) posto $y=\lambda$, segue $z=1-2\lambda$ e dalla 1ª equazione si ottiene x=0 : $\{x=0,\ y=\lambda,\ z=1-2\lambda\}$.

2° caso: k=8, Dalla 3ª equazione si ottiene z=0, mentre dalla 2ª z=1, perciò in tal caso il sistema è incompatibile.

3° caso k diverso da 2 e da 8. Il sistema è determinato e si ha: z=0, y=3/(8-k), x=2-12/(8-k): **x=(4-2k)/(8-k), y=3/(8-k), z=0.**

III) P(1,0,1), Q(3,1,0), π di equazione x+2y-z=0.

a) Retta s=P+Q: {x=1+2λ, y=λ, z=1-λ}.

b) retta p per P perpendicolare a π: {x=1+λ, y=2λ, z=-λ}.
Eliminando il parametro, ho le equazioni cartesiane di p: {2x-y-2=0, x+z-2=0}.

c) I piani per P perpendicolari a π formano un fascio di asse p:
[1] α(2x-y-2)+β(x+z-2)=0.
Alternativamente, si prende la stella di piani di centro P: a(x-1)+by+c(z-1)=0 e si impone che Il vettore normale al piano generico della stella sia ortogonale al vettore normale a π:
a+2b-c=0, da cui c=a+2b, perciò il fascio di piani è
[2] ax+by+(a+2b)z-2a-2b=0.
(Verificare che [1] e [2]rappresentano lo stesso fascio di piani).

d) Rette per Q parallele a π: {x=3+lk, y=1+mk, z=nk} col vincolo che il vettore direttore delle rette ^{t}(l, m, n) appartenga al sottospazio direttore di π (π stesso, dato che il termine noto è 0):
l+2m-n=0, n=l+2m. Si ottiene il fascio di rette {x=3+lk, y=1+mk, z=(l+2m)k.
(Verificare che tali rette giacciono sul piano per Q parallelo a π).

e) d(P,Q)=$\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

f) La retta s =P+Q è incidente a π in P, perché P appartiene al piano, ma non è parallela al piano (né giace sul piano), perché Q non appartiene al piano (verifica immediata).

IV) Autovalori: det(A$-\lambda$I)=0.

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 0 & -5 & 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$$

➔ (applico Laplace alla matrice triangolare inferiore)

e gli autovalori sono λ = 0, di m.a.=1, λ=3 di m.a.=1 e λ=2 di m.a.=2.
A sarà diagonalizzabile, se U_2, autospazio relativo all'autovalore 2, ha dim=2.
(molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica).

$$U_2 : \begin{pmatrix} 0,0,0,0 \\ 3,-2,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,-5,0,1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$ ➔ dim(U_2)=2 ➔ A è diagonalizzabile.

Una base di U_2 è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}$.

$U_0 : \begin{pmatrix} 2,0,0,0 \\ 3,0,0,0 \\ 0,0,2,0 \\ 0,-5,0,3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0}$ ➔ $\{x_1=0,\ x_3=0,\ 5x_2-3x_4=0\}$; $\dim(U_0)=1$ e una base è

${}^t(0,3,0,5)$.

$U_3 : \begin{pmatrix} -1,0,0,0 \\ 3,-3,0,0 \\ 0,0,-1,0 \\ 0,-5,0,0 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0}$ ➔ $\{x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=\lambda\}$ e una base è ${}^t(0,0,0,1)$.

A si diagonalizza in $D = \begin{pmatrix} 2,0,0,0 \\ 0,2,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,3 \end{pmatrix}$ e la corrispondente matrice diagonalizzante è

(attenzione all'ordine degli autovettori colonna) $P = \begin{pmatrix} 2,0,0,0 \\ 3,0,3,0 \\ 0,1,0,0 \\ 15,0,5,1 \end{pmatrix}$.

N.B. Se si diagonalizza A in $D = \begin{pmatrix} 0,0,0,0 \\ 0,3,0,0 \\ 0,0,2,0 \\ 0,0,0,2 \end{pmatrix}$, qual è la matrice diagonalizzante?