FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 1°-04-2008 Compito B

I)Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1-x_2+x_3 \, , \, x_1+3x_2+2x_3+x_4 \, , \, 3x_1+5x2+5x_3+2x_4).$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di R^4 di equazione $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di KerT e una base;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap$ KerT .

II) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x+2y+3z = 5 \\ 2x-y = 3 \\ 7x+4y+kz = 21 \\ 8x+y+(k-3)z = 19. \end{cases}$$

Si risolva poi il sistema per k = -1.

III) In R^3 sono dati il punto P(2,1,0) e il piano π: x - y - z = 0.
Determinare:
a) la retta r passante per P e perpendicolare a π;
b) il piano per P e parallelo a π;
c) le rette per P parallele a π;
d) i piani per P perpendicolari a π;
e) la distanza dell'origine O(0,0,0) dalla retta r;
f) la retta s per O(0,0,0) perpendicolare e incidente ad r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1,1,-2 \\ 2,0,-1 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D oppure giustificare perché A non è diagonalizzabile.

Soluzione.

I)

(a) $A=\begin{pmatrix} 1,-1,1,0 \\ 1,3,2,1 \\ 3,5,5,2 \end{pmatrix}$.

(b) KerT: $x_1-x_2+x_3 = 4x_2+x_3+x_4 = 0$, dim=2, una base=$\{^t(1,0,-1,1),\ ^t(0,1,1,-5)\}$.

(c) ImT: dim=2, eq. carteasiana: $x+2y-z=0$, una base: due colonne della matrice A di T, per es. 1ª e 4ª .

(e) T(U) = ImT.

(f) Ortog(KerT): $\{x_1-x_3+x_4 = x_2+x_3-5x_4 =0\}$ dim=2, una base due righe di A (verificare).

(g) dim(U $\cap$ KerT)=1, un vettore di base è $^t(11, 1, -10, 6)$.

II)

Per k = 9, ∞^1 soluzioni $x=(11-3\lambda)/5$, $y=(7-6\lambda)/5$, $z=\lambda$.

Per $k \neq 0$, una sola soluzione: x=11/5, y= 7/5, z=0.

Pertanto, per k=-1 la soluzione è x=11/5, y= 7/5, z=0.

IV)

(a) Autovalori $\lambda = -1$ di m.a.=2 e $\lambda = 2$ di m.a.=1.

(b) L'autospazio U_{-1} ha dim=1, una base è $\{^t(1, -2, 0)\}$;
l'autospazio U_2 (di dim=1, ovvio) ha eq. x-y = z = 0.

(c) Siccome la molt. Geometrica di $\lambda = -1$ è 1, diversa dalla molt. Algebrica, A non è diagonalizzabile, non esiste una base di autovettori.