FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 1°-04-2008 Compito A

I) Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da
$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+2x_2+2x_3-x_4 , 2x_1+x_3+2x_4, 4x_1+4x_2+5x_3)$.
Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di R^4 di equazione $x_1 + 3x_4= 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di KerT e una base;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap$ KerT .

II) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k:
$x+ y+ z = 7$
$2x+ y - 3z = 2$
$4x+3y+ kz = 16$
$kx+ y+13z = k+26$.
Si risolva poi il sistema per k = 2.

III) In R^3 sono dati il punto P(1,0,1) e il piano π: $x + y + z = 0$.
Determinare:
a) la retta r passante per P e perpendicolare a π;
b) il piano per P e parallelo a π;
c) le rette per P parallele a π;
d) i piani per P perpendicolari a π;
e) la distanza dell'origine O(0,0,0) dalla retta r;
f) la retta s per O(0,0,0) perpendicolare e incidente ad r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2,-9,0 \\ 0,-1,0 \\ 6,-18,-1 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D oppure giustificare perché A non è diagonalizzabile.

Soluzione

I)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1,2,2,-1 \\ 2,0,1,2 \\ 4,4,5,0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,2,-1 \\ 0,-4,-3,4 \\ 0,-4,-3,4 \end{pmatrix}$ da cui si vede che rango(A)=dim(ImT)=2 e perciò

(b) dim(KerT)=4-2=2.

Eq. cartesiane di KerT: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$;

posto $x_3 = -4\alpha$, $x_4 = \beta$, segue $x_2 = 3\alpha+\beta$ e $x_1 = 2\alpha-\beta$, perciò le equazioni parametriche

di KerT sono $\begin{cases} x_1 = 2\alpha - \beta \\ x_2 = 3\alpha + \beta \\ x_3 = -4\alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$, da cui si ricava una base: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) dim(ImT)=2, una base = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ [metà 2ª colonna e 4ª colonna di A];

equaz. parametriche: $x = \alpha-\beta$, $y = 2\beta$, $z = 2\alpha$, equaz. cartesiana: $2x+y-z = 0$.

(d) T non è iniettiva (KerT$\neq\{\mathbf{0}\}$) e non è suriettiva (ImT$\neq\boldsymbol{R}^3$ codominio di T).

(e) dim(U)=3, una base è $\{u_1 = {}^t(0,1,0,0),\ u_2 = {}^t(0,0,1,0),\ u_3 = {}^t(-3,0,0,1)\}$;
T(U) è generato da $T(u_1)$, $T(u_2)$, $T(u_3)$; siccome T(U) è incluso in ImT, dim(T(U))$\leq$2.
$T(u_1) = {}^t(2,0,4)$, $T(u_2) = {}^t(2,1,5)$; essendo questi linearmente indipendenti, non è necessario calcolare $T(u_3)$. Dim(T(U)) = 2 e perciò T(U)=ImT.

(f) Il compl. ortogonale di KerT è costituito da (tutti) i vettori di $\boldsymbol{R}^4$ ortogonali ai (due) vettori della trovata base di KerT, perciò le equazioni cartesiane sono $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Una base è costituita da due vettori riga di A (verificare).

(g) Per trovare U ∩ KerT si sostituiscano le equazioni parametriche di KerT nell'equazione cartesiana di U: si ottiene $(2\alpha-\beta)+3\beta = 0$, da cui $\beta = -\alpha$ e perciò

U ∩ KerT $= \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 2\alpha \\ -4\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \right\}$, dim =1, una base si ottiene banalmente per $\alpha = 1$.

II) Sistema lineare 4x3

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & k & 16 \\ k & 1 & 13 & k+26 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -12 \\ 0 & -1 & (k-4) & -12 \\ 0 & (1-k) & (13-k) & 26-6k \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & (k+1) & 0 \\ 0 & 0 & (8+4k) & 14+6k \end{array}.$$

1°) k = -1. La 3ª riga è un'identità, la 4ª dà z= 2, quindi y=2 e x=3.
Sistema determinato: x=3, y=2, z=2.

2°) k$\neq$ -1. La 3ª dà z=0, la 4ª dà z=(14+6k)/(8+4k), perciò il sistema è compatibile (e determinato) se k= -7/3; in tal caso z=0, y=y=12, x=-5.
Dunque, per k= -7/3 x= -4, y= 12, z= 0.

Per $k \neq -1$ e $k \neq -7/3$ il sistema è incompatibile.
Segue che per $k = 2$ il sistema è incompatibile.

III)

(a) r: {x = 1+t, y = t, z = 1+t}. Vettore dir. $\underline{\mathbf{r}} = {}^t(1,1,1)$.

(b) $(x-1)+y+(z-1) = 0 \rightarrow x+y+z-2 = 0$.

(c) Le rette sono ∞^1: formano un fascio di centro P e giacciono nel piano del punto (b).
Stella di rette di centro P: x=1+lt, y=mt, z=1+nt, con $(l,m,n) \in \pi_0 \rightarrow l+m+n = 0$,
quindi il fascio di rette è x=1+lt, y=t, z= 1-(l+m)t.

(d) I piani sono ∞^1: formano un fascio di asse la retta r del punto (a).
Stella di piani di centro P: $a(x-1)+by+c(z-1) = 0$, con $(a,b,c).\underline{\mathbf{r}} = 0 \rightarrow a+b+c = 0$.
Quindi il fascio di piani è $ax+by-(a+b)z+b = 0$.

(e) Detto R il punto generico della retta r, il vettore $\underline{OR} = {}^t(1+t,\ t,\ 1+t)$; imponendo che $\underline{OR}\ .\ \underline{\mathbf{r}} = 0$, si ottiene $t = -2/3$ e il vettore $\underline{OR}$ di minima distanza di O da r è ${}^t(1/3,\ -2/3,\ 1/3)$. La distanza richiesta è la norma di tale vettore = $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(f) La retta per O perpendicolare e incidente r è la retta OR con R(1/3, -2/3, 1/3);
vettore dir. (1, -2, 1) : x=t, y=-2t, z=t.

IV)

(a) $\mathrm{Det}(A-\lambda I) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} (2-\lambda),-9,0 \\ 0,(-1-\lambda),0 \\ 6,-18,-1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (-1-\lambda).\mathrm{Det}\begin{pmatrix} (2-\lambda),0 \\ 6,(-1-\lambda) \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2(2-\lambda) = 0$,

perciò gli autovalori sono $\lambda = -1$ con m.a. =2 e $\lambda = 2$ con m.a. =1.

(b) Autospazi.

U_{-1}: $\begin{pmatrix} 3,-9,0 \\ 0,0,0 \\ 6-18,0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1,-3,0 \\ 0,0,0 \\ 0,0,0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow$ Eq. di U_{-1}: x-3y=0, dim=2,

una base = $\{{}^t(3,\ 1,\ 0),\ {}^t(0,\ 0,\ 1)\}$.

U_2: $\begin{pmatrix} 0,-9,0 \\ 0,-3,0 \\ 6,-18,-3 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,1,0 \\ 0,1,0 \\ 2,-6,-1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow$ Eq. di U_2: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$, dim=1,

una base = $\{{}^t(1,\ 0,\ 2)\}$.

(c) Siccome le dimensioni degli autospazi sono uguali alle molteplicità algebriche dei due autovalori, A è diagonalizzabile; la matrice diagonale

$D=\begin{pmatrix} 2,0,0 \\ 0,-1,0 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix}$, la matrice diagonalizzante $P=\begin{pmatrix} 1,3,0 \\ 0,1,0 \\ 2,0,1 \end{pmatrix}$.