

Facoltà di Ingegneria
Esame di Algebra Lineare e Geometria
Prova scritta del 3/04/2007

os

Compito D

I) a) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} x + ky + z - t = k - 1 \\ kx + y + z - t = 0 \\ x + y - z + 3t = 3k - 1 \end{cases}$$

b) Risolvere il sistema per $k = 0$.

II) In \mathbf{R}^3 sono dati il $P(-1, -1, -2)$ e la retta $r: 2x+y-z = x-y = 0$. Determinare:

- a) il piano π_1 passante per P e perpendicolare ad r .
- b) il piano π_2 passante per P e contenente la retta r .
- c) la retta s passante per P , incidente e perpendicolare ad r .
- d) i piani per P paralleli ad r .
- e) la distanza tra il punto P e la retta r .

III) Dato l'endomorfismo T di \mathbf{R}^4 di equazione

$$T(x,y,z,t) = (x+3y+z+4t, -x+y-z, -x-3y-z-4t, x+y+z+2t),$$

- a) Scrivere la matrice T associata a T rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^4 .
- b) Determinare $\text{Ker}(T)$, la dimensione, le equazioni, una sua base.
- c) Determinare $\text{Im}(T)$, la dimensione, le equazioni, una sua base.
- d) Determinare $\text{Ker}(T) \cap W$, ove W è il sottospazio di equazione $x+2y-z+4t = 0$.
- e) Determinare il complemento ortogonale di $\text{Ker}(T)$.
- f) Calcolare gli autovalori di T con le rispettive molteplicità algebriche.
- g) Determinare gli autospazi di T , con dimensioni e basi.
- h) Dire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante N .

Alcune risposte

- I a)** $k=1$: ∞^2 soluzioni. $x=1-a-b, y=a, z=-1+2b, t=b$
 $k \neq 1$: ∞^1 soluzioni. $x=-1+2\lambda, y=2\lambda, z=3k-(3k+5)\lambda, t=2k-(k+3)\lambda$.
- b)** Per $k=0, x=-1+2\lambda, y=2\lambda, z=-5\lambda, t=-3\lambda$.
- III f)** Autovalori. $\lambda=0$, m.a.=2; $\lambda=1$, m.a.=1, $\lambda=2$, m.a.=1.
- g)** Autospazi. $U_0=\text{Ker}T$; una base= $\{(1,0,-1,0), (1,1,0,-1)\}$;
 U_1 dim=1, una base= $\{(1,-1,-1,1)\}$; U_2 dim=1, una base= $\{(2,0,-2,1)\}$.
- h)** Siccome le m.g. sono uguali a quelle algebriche, T è diagonalizzabile.