

Facoltà di Ingegneria
Esame di Algebra Lineare e Geometria
Prova scritta del 3/04/2007

05

Compito C

I) a) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} kx + y - z + t = k - 1 \\ x + y - z + kt = 2k - 2 \\ x + ky - z + t = 0 \end{cases}$$

b) Risolvere il sistema per $k=2$.

II) In \mathbf{R}^3 sono dati il Punto $P(2, 9, -2)$ e la retta $r: x+3y = 2y-z = 0$. Determinare:

- a) il piano π_1 passante per P e perpendicolare ad r .
- b) il piano π_2 passante per P e contenente la retta r .
- c) la retta s passante per P , incidente e perpendicolare ad r .
- d) i piani per P paralleli ad r .
- e) la distanza tra il punto P e la retta r .

III) Dato l'endomorfismo T di \mathbf{R}^4 di equazione

$$T(x,y,z,t) = (x+y-z-2t, y, y-2t, t),$$

- a) Scrivere la matrice T associata a T rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^4 .
- b) Determinare $\text{Ker}(T)$, la dimensione, le equazioni cartesiane e parametriche, una sua base.
- c) Determinare $\text{Im}(T)$, la dimensione, le equazioni parametriche e cartesiane, una sua base.
- d) Determinare $\text{Ker}(T) \cap W$, ove W è il sottospazio di equazione $x+2y-z+4t = 0$.
- e) Determinare il complemento ortogonale di $\text{Ker}(T)$.
- f) Calcolare gli autovalori di T con le rispettive molteplicità algebriche.
- g) Determinare gli autospazi di T , con dimensioni e basi.
- h) Dire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante N .

Alcune risposte

I a) $k=1$: ∞^3 soluzioni: $x=a, y=b, z=c, t=-a-b+c$;

$k \neq 1$: ∞^1 soluzioni: $x=1+\lambda, y=\lambda, z=3+(2+k)\lambda, t=2+\lambda$.

b) Per $k=2$, $x=1+\lambda, y=\lambda, z=3+4\lambda, t=2+\lambda$.

III f) Autovalori. $\lambda=0$, m.a.=1; $\lambda=1$, m.a.=3.

g) Autospazi. U_0 dim=1, base= $\{(1,0,1,0)\}$, $U_0=\text{Ker}T$;
 U_1 dim=3, Base= $\{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,-2,1)\}$.

h) T è diagonalizzabile, perché le m.g. sono uguali alle m.a.