Facoltà di Ingegneria
Esame di Algebra Lineare e Geometria
Prova scritta del 3/04/2007

os Compito B

I) a) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare parametrico al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} kx+y+z-t=k-1 \\ x-y+2z+kt=3k-1 \\ x+y+kz-t=0 \end{cases}$$

b) Risolvere il sistema per k = 0.

II) In $\boldsymbol{R}^3$ sono dati il punto P(2, 1, -1) e la retta r: 2x+y = x-y-z = 0. Determinare:

a) il piano π_1 passante per P e perpendicolare ad r.
b) il piano π_2 passante per P e contenente la retta r.
c) la retta s passante per P, incidente e perpendicolare ad r.
d) i piani per P paralleli ad r.
e) la distanza tra il punto P e la retta r.

III) Dato l'endomorfismo T di $\boldsymbol{R}^4$ di equazione

T(x,y,z,t) = (x+y-z-2t, -x+y+z, x+y-z-2t, -x+z+t),

a) Scrivere la matrice T associata a T rispetto alla base canonica di $\boldsymbol{R}^4$.
b) Determinare Ker(T), la dimensione, le equazioni cartesiane e parametriche, una sua base.
c) Determinare Im(T), la dimensione, le equazioni parametriche e cartesiane, una sua base.
d) Determinare Ker(T)$\cap$W, essendo W il sottospazio di equazione x+2y-z+4t=0.
e) Determinare il complemento ortogonale di Ker(T).
f) Calcolare gli autovalori di T con le rispettive molteplicità algebriche.
g) Determinare gli autospazi di T, con dimensioni e basi.
h) Dire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante N.

Alcune risposte

I a) k=1: ∞^2 soluzioni; x=-2-3a+3b; y=a; z=2+2°-3b; t=b.

k$\neq$ 1: ∞^1 soluzioni; x=1+λ; y=2-(k²+k+3)λ/(k−1); z=λ**;** t=3-(k+4)λ/(k-1).

b) Per k=0, x=1+λ; y=2+3λ; z=λ; t=3+4λ.

III f) Autovalori di T: λ=0, m.a.=2; λ=1, m.a.=2.

g) Autospazi: U_0 = KerT (Ovvio), Base={(1,0,1,0), (1,1,0,1)}, dim=2;
U_1: x-z=y-z-2t=0, dim=2, Base={(1,1,1,0),(9,2,0,1)}.

h) T è diagonalizzabile, perché le dim degli autospazi sono uguali alle m.a. dei relativi autovalori.