Facoltà di Ingegneria
Esame di Algebra Lineare e Geometria
Prova scritta del 3/04/2007

os Compito A

I) a) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare parametrico al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} kx+y-z+t=k-1 \\ x-y+kz+2t=3k-1 \\ x+y-z+kt=0 \end{cases}$$

b) Risolvere il sistema per k = 2.

II) In $\boldsymbol{R}^3$ sono dati il punto P(1, 1, 2) e la retta r: x+y-z = 2x-y = 0. Determinare:

a) il piano π_1 passante per P e perpendicolare ad r.
b) il piano π_2 passante per P e contenente la retta r.
c) la retta s passante per P, incidente e perpendicolare ad r.
d) i piani per P paralleli ad r.
e) la distanza tra il punto P e la retta r.

III) Dato l'endomorfismo T di $\boldsymbol{R}^4$ di equazione

T(x,y,z,t) = (3x+3y+3z+6t, -3x+3y-3z, -3x-3y-3z-6t, 3x+3z+3t),

a) Scrivere la matrice *T* associata a T rispetto alla base canonica di $\boldsymbol{R}^4$.
b) Determinare Ker(T), la dimensione, le equazioni, una sua base.
c) Determinare Im(T), la dimensione, le equazioni, una sua base.
d) Determinare Ker(T)$\cap$W, ove W è il sottospazio di equazione x+2y-z+4t = 0.
e) Determinare il complemento ortogonale di Ker(T).
f) Calcolare gli autovalori di T con le rispettive molteplicità algebriche.
g) Determinare gli autospazi di T, con dimensioni e basi.
h) Dire se *T* è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere la matrice diagonale *D* e la matrice diagonalizzante *N*.

Svolgimento e soluzioni.

I) a)

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & k & 0 \\ 1 & -1 & k & 2 & 3k-1 \\ K & 1 & -1 & 1 & k-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & (k+1) & (2-k) & 3k-1 \\ 0 & (1-k) & (k-1) & (1-k^2) & k-1 \end{matrix}.$$

1° caso: k=1.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad Rg(A)=Rg(A^c)=2 \Rightarrow \infty^2 \text{ soluzioni:}$$

x = -2-3a+3b , y = a , z = b , t = 2+2a-2b.

2° caso: k diverso da 1. Dividendo la terza riga per 1-k, ho:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & (k+1) & (2-k) & 3k-1 \\ 0 & 1 & -1 & (1+k) & -1 \end{array} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -1 & (1+k) & -1 \\ 0 & 0 & (k-1) & (4+k) & 3k-3 \end{array} \quad \text{e posto } t=\lambda \text{ segue}$$

$z=3-(4+k)\lambda/(k-1)$, $y= -1-(1+k)\lambda+ 3-(4+k)\lambda/(k-1) = 2-(k^2-1+4+k)\lambda/(k-1)$,
$x = -k\lambda+3-(4+k)\lambda/(k-1)- 2+(k^2+3+k)\lambda/(k-1) = 1+(-k^2+k-4-k+ k^2+3+k)\lambda/(k-1) = 1+(k-1)\lambda/(k-1) = 1+\lambda$.

(Risulta $Rg(A)=Rg(A^c)=3$ e quindi ∞^1 soluzioni). Ordinando:

$x = 1+\lambda$, $y = 2 - (k^2+k+3)\lambda/(k-1)$, $z = 3 - (k+4)\lambda/ (k-1)$, $t = \lambda$.

b) Per k = 2, si ha: $x = 1+ \lambda$, $y = 2 -9\lambda$, $z = 3 - 6\lambda$, $t = \lambda$.

II) a) r : y=2x, z=3x => $r:\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ e quindi π_1 : (x-1)+2(y-1)+3(z-2)=0 ,

ovvero π_1 : x+2y+3z-9=0.

b) Fascio di piani per r: a(x+y-z)+b(2x-y)=0; passaggio per P:
a(1+1-2)+b(2-1)=0 => b=0, perciò π_2 : x+y-z=0.

c) $s = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow s:\begin{cases} x+2y+3z-9=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x+y \\ x+2y+3x+3y-9=0 \end{cases}$, perciò

$\vec{s}\begin{cases} 4x = -5y \\ z = x+y \end{cases} \Rightarrow \vec{s} = (5t, -4t, t)$ e dovendo s passare per P, $s:\begin{cases} x = 1+5t \\ y = 1-4t \\ z = 2+t \end{cases}$.

d) I piani per P paralleli ad r formano un fascio avente per asse la retta p passante per P e parallela ad r. $p:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 2+3\lambda \end{cases}$, da cui λ=x-1 e $p:\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 3x-z-1=0 \end{cases}$. Segue che il fascio di piani richiesto è a(2x-y-1)+b(3x-z-1)=0.

e) Il punto generico della retta r è R(t, 2t, 3t). Impongo che il vettore *PR* sia ortogonale al vettore direttore di r (1, 2, 3):
(t-1, 2t-1, 3t-2).(1, 2, 3) = 0, da cui t = 9/14. Segue *PR* = (-5/14, 4/14, -1/14)
e infine $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{42}}{14} = \sqrt{\dfrac{3}{14}}$.

Osservazione. Il vettore *PR* = (-5/14, 4/14, -1/14) è proporzionale al vettore direttore (5, -4, 1) della retta s determinata al punto c). Perciò il procedimento seguito nel punto e) può essere usato per risolvere quel quesito (retta per un punto dato perpendicalare e incidente una retta data).

III)

a) $\begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ => Rg(T)=2 =dim(ImT) e

b) Dim(KerT)=4-2=2.

KerT : $\begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ y+t=0 \end{cases}$ (Eq. cartesiane) , $\begin{cases} x=a+b \\ y=b \\ z=-a \\ t=-b \end{cases}$ (Eq. parametriche) da cui

Segue che una base di KerT è {(1,0,-1,0), (1,1,0,-1)}.

c) ImT ha dim=2 , una base è, per esempio, {1ª colonna/3, 2ª colonna/3)} della matrice di T: base={(1,-1,-1,1), (1,1,-1,0)}.

ImT: $\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-\lambda-\mu \\ t=\lambda \end{cases}$ (Eq. Parametriche) => $\begin{cases} x+z=0 \\ x-y-2t=0 \end{cases}$ (Eq. cartesiane).

d) $KerT \cap W$ inserendo le eq. parametriche di KerT nell'equazione cartesiana di W si ha a+b+2b+a-4b=0 da cui b=2a e infine $KerT \cap W$ ={a(3,2,-1,-2)}. Questo sottospazio intersezione ha dim=1.

e) Il complemento ortogonale H di KerT deve avere tutti i suoi vettori ortogonali ai vettori di base di KerT, perciò

H: $\begin{cases} (x,y,z,t).(1,0,-1,0)=0 \\ (x,y,z,t).(1,1,0,-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+y-t=0 \end{cases}$. Una base di H è {(1,0,1,1), (0,1,0,1)}. Si vede che i vettori di base di H sono ortogonali ai vettori di base di KerT.

f) Autovalori di T. $\begin{matrix} (3-\lambda) & 3 & 3 & 6 \\ -3 & (3-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -3 & (-3-\lambda) & -6 \\ 3 & 0 & 3 & (3-\lambda) \end{matrix}$

Sottraendo la 3ª dalla 1ª colonna abbiamo

$\begin{matrix} -\lambda & 3 & 3 & 6 \\ 0 & (3-\lambda) & -3 & 0 \\ \lambda & -3 & (-3-\lambda) & -6 \\ 0 & 0 & 3 & (3-\lambda) \end{matrix}$. Sommo ora la 1ª riga alla 3ª e ho:

$$\begin{matrix} -\lambda & 3 & 3 & 6 \\ 0 & (3-\lambda) & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & (3-\lambda) \end{matrix}$$

. Da qui si ottiene:

$\lambda^2(3-\lambda)^2 = 0$ e perciò gli autovalori sono $\lambda=0$ m.a.=2 e $\lambda=3$ m.a.=2.

g) Autospazi.

$U_0 = U(\lambda=0)$. E' uguale a KerT (dim=2, base :vedi KerT).

$U_3 = U(\lambda=3)$.
$$\begin{matrix} 0 & 3 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -6 & -6 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\mathrm{Dim}(U_3) = 2$, U_3 : $x+z = y+z+2t = 0$; una base è $\{1,1,-1,0), (0,-2,0,1)\}$.

h) sicome le dimensioni degli autospazi (molteplicità geometriche degli autovalori) sono uguali alle molteplicità algebriche, *T* è diagonalizzabile:

$$D = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix} \qquad N = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Nota. $NDN^{-1} = T$. Siccome *N* è una base (di autovettori) di $\boldsymbol{R}^4$, si può interpretare come un endomorfismo (automorfisno) che manda la base canonica nella base di autovettori, perciò N^{-1} manda la base di autovettori nella base canonica; quando gli autovettori sono i vettori della base canonica, l'endomorfismo è rappresentato da una matrice diagonale *D* , poi *N* rimanda la base canonica nella base di autovettori e alla fine si ottiene la formula $NDN^{-1} = T$.