FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27-01-2009 Compito D

I) Sia $T : R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - 3x_2 + x_4, 3x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 3x_4, 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3 e di R^4;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) la controimmagine, attraverso T, del vettore $\underline{v}(5,5,7)$;
f) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;
g) un sottospazio W tale che $W \oplus \mathrm{Im}(T) = R^3$.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} x + ky - kz = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ kx + y + 7z = -3 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k= - 2.

III) In R^3 sono dati il punto P(–2, 0, 1), la retta r: x = 2t + 3, y = –t , z = 3t +1 e il piano π: 3x + 2y – 4 = 0.

Determinare:

a) il piano π' passante per P e perpendicolare a r ;
b) il piano γ passante per P e parallelo a π;
c) la retta s passante per P e perpendicolare a π ;
d) le rette passanti per P e parallele a π ;
e) la distanza di P da π;
f) il piano α contenente P ed r .

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Alcune risposte

I)

b) Una base di KerT è $\{{}^t(3,1,0,0), {}^t(-1,0,0,1)\}$

c) Una base di ImT è (1^a e 3^a colonna di *T*) $\{{}^t(1,3,2), {}^t(0,9,1)\}$ da cui segue una rappresentazione parametrica e l'eq. cartesiana $15x+y-9z = 0$.

e) Condizione necessaria e sufficiente perché $T^{-1}(\underline{v})$ sia **non vuoto** è che $\underline{v} \in$ ImT; ma $\underline{v} \notin$ **ImT**.

f) Detta $\{\underline{u}_1 , \underline{u}_2\}$ una base di U, $T(U) = \{aT(\underline{u}_1)+bT(\underline{u}_2)\}$. Ma comunque si scelga una base $\{\underline{u}_1 , \underline{u}_2\}$ di U, i vettori $T(\underline{u}_1)$ e+$T(\underline{u}_2)$ sono lin. indip., perciò T(U) ha dim. 2 ed essendo un sottospazio di ImT (di dim. 2) , T(U) = ImT.

II)

a) Per k = 3 il sistema è incompatibile; per k = -3 il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$x = 1+3\lambda,\ y = 2\lambda,\ z = \lambda;$$

per k diverso da 3 e da -3 il sistema è determinato:

$$x = \frac{-3}{k-3}, y = \frac{2}{k-3}, z = \frac{1}{k-3}.$$

b) Per k = -2 si ottiene: x = 3/5, y = -2/5, z = -1/5.

III) Tratterò solo il quesito f, in due modi diversi.

Primo modo: Stella S(P) di piani di centro P: $a(x+2)+by+c(z-1) = 0$; ora impongo che la retta r appartenga a S(P): $a(2t+5)+b(-t)+c(3t) = 0$, da cui $5a = 0$ e $2a-b+3c = 0 \rightarrow a = 0$ e $b = 3c$. Di conseguenza il piano **α è 3y+z-1 = 0.**

Secondo modo. Fascio F(r) di piani di asse r : $a(x+2y-3)+b(3y+z-1) = 0$; ora impongo che il punto P appartenga a F(r) : $a(-2-3)+b(1-1) = 0 \rightarrow a=0$ e perciò il piano **α è 3y+z-1 = 0.**

IV)

a) Autovalori $\lambda= -3$ con m.a. 2 e $\lambda=1$ con m.a. 1.

b) U_{-3} : $x-y+z = 0$, una base è $\{{}^t(1,1,0), {}^t(0,1,1)\}$ (dunque A è diagonalizzabile).
U_1 : una base è $\{{}^t(0,-3,1)\}$.

c) Cose ovvie.