FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27-01-2009 Compito C

I) Sia $T: R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - 3x_2 + x_4, 3x_1 - 9x_2 - x_3 + 5x_4, 2x_1 - 6x_2 + x_3).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3 e di R^4;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) la controimmagine, attraverso T, del vettore $\underline{v}(2,2,-7)$;
f) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;
g) un sottospazio W tale che $W \oplus \mathrm{Im}(T) = R^3$.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} x + kz = -1 \\ kx - 2y + z = -3 \\ -kx + 4y + 7z = +3 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=2.

III) In R^3 sono dati il punto P(3, 0, 1), la retta r: x = –t, y = 2t + 3, z = 4t –1 e il piano π: 2x + 3z + 1 = 0.

Determinare:

a) il piano π' passante per P e perpendicolare a r;
b) il piano γ passante per P e parallelo a π;
c) la retta s passante per P e perpendicolare a π;
d) le rette passanti per P e parallele a π;
e) la distanza di P da π;
f) il piano α contenente P ed r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Alcune risposte

I)

b) Una base di KerT: $\{{}^t(3,1,0,0), {}^t(-1,0,2,1)\}$.
c) Una base di ImT : $\{{}^t(1,3,2), {}^t(0,-1,1)\}$ (1^a e 3^a colonna di T; perché no 1^a e 2^a ?).

Equazione cartesiana di ImT: 5x-y-z = 0.

e) $\underline{\mathbf{v}} \notin$ ImT, perciò $T^{-1}(\underline{\mathbf{v}})$ è vuoto.

Complemento: se $\underline{\mathbf{v}}$ fosse $^t(1,1,4)$, $T^{-1}(\underline{\mathbf{v}})$ non sarebbe vuoto (perché?). In tal caso un vettore di $T^{-1}(\underline{\mathbf{v}})$ sarebbe $\underline{\mathbf{b}} = {}^t(1,0,2,0)$, come si verifica facilmente; con questa informazione, scrivere senza ulteriori calcoli la formula che dà tutti i vettori di $T^{-1}(\underline{\mathbf{v}})$.

Se non conoscessimo $\underline{\mathbf{b}}$, come dovremmo procedere?

f) T(U) = ImT.

g) W = $\{\alpha.{}^t(1,0,0)\}$, oppure … ce ne sono infiniti. Uno è speciale: $\{\alpha.{}^t(5,-1,-1)\}$; perchè?

II)

a) Per k = -3 il sistema è incompatibile.

Per k = 3 il sistema ha ∞^1 soluzioni: x = -1 -3λ, y = -4λ, z = λ.

Per diverso da -3 e da 3 il sistema è determinato: $x = \dfrac{-3}{3+k}, y = \dfrac{4}{3+k}, z = \dfrac{-1}{3+k}$.

b) Per k = 2 ovviamente $x = \dfrac{-3}{5}, y = \dfrac{4}{5}, z = \dfrac{-1}{5}$.

III) Le solite cose. Vedi la traccia A.

IV)

a) Autovalori: λ = 3 con m.a. 2; λ = 6 con m.a. 1.

b) Autospazi: U_3 ha dim 2 e una base è $\{{}^t(1,1,0), {}^t(0,1,0)\}$ (già si capisce che A è diagonalizzabile); U_6 ha dim 1 e una base è $\{{}^t(2,-1,0)\}$.

c) $D = \begin{pmatrix} 3,0,0 \\ 0,3,0 \\ 0,0,6 \end{pmatrix}$ e una diagonalizzante associata è $P = \begin{pmatrix} 1,0,2 \\ 1,1,-1 \\ 0,1,0 \end{pmatrix}$.

Complemento. Calcolare P^{-1} e verificare che $P^{-1}AP = D$.