FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27-01-2009 Compito B

I) Sia $T : R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4, x_1 + x_3 - 2x_4, 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3 e di R^4;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) la controimmagine, attraverso T, del vettore $\underline{v}(2,2,5)$;
f) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$;
g) un sottospazio W tale che $W \oplus \operatorname{Im}(T) = R^3$.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} 2x + 3y + kz = 4 \\ -x + 2y - 2z = -2 \\ kx + y - z = -1 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k= 3.

III) In R^3 sono dati il punto P(1, 2,0), la retta r: x = 3t, y = – t + 2, z = 4t e il piano π: 4x + 2y – 5 = 0.

Determinare:

a) il piano π' passante per P e perpendicolare a r;
b) il piano γ passante per P e parallelo a π;
c) la retta s passante per P e perpendicolare a π;
d) le rette passanti per P e parallele a π;
e) la distanza di P da π;
f) il piano α contenente P ed r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Alcune risposte

I)

b) Una base di KerT è $\{{}^t(1,0,-1.0), {}^t(2,0,0,1)\}$.
c) Una base di ImT è $\{{}^t(1,1,2), {}^t(2,0,1)\}$, eq. cartes. : x+3y-2z = 0.

e) Siccome $\underline{\mathbf{v}} \notin \mathrm{Im}T$ (verificare), $T^{-1}(\underline{\mathbf{v}}) = \emptyset$ (insieme vuoto).
f) T(U) = ImT
g) W è un qualsiasi sottospazio di $\boldsymbol{R}^3$ avente dimensione 1 non incluso in ImT, per es. W = {a.^{t}(1,0,0)}, oppure W' = {a.^{t}(1,3,-2)}, complemento ortogonale di ImT.

II)

a) Per k= -3 il sistema è incompatibile; per k= -1/2 il sistema ha ∞^1 soluzioni:
$x = 2-10\lambda$, $y = 9\lambda$, $z = 14\lambda$;

per $k \neq -3$ e $k \neq -1/2$, il sistema è determinato: $x = 0, y = \dfrac{4-k}{3+k}, z = \dfrac{7}{3+k}$

b) Per k=3 la soluzione è : x = 0, y= 1/6, z=7/6.

III)

a) π' : 3x-y+4z-1 = 0.
b) γ : 4x+2y-8 = 0.
c) s : x=1+4t, y=2+2t, z=0.
d) x=1+lt, y=2-2lt, z=nt.
e) $d(P,\pi) = \dfrac{3}{\sqrt{20}}$
f) Il piano P+r è 4y+z-8=0. (Si determini prima il fascio di piani di asse r e poi si imponga il passaggio per P).

Complemento fuori appello. Si trovi la distanza tra le rette r ed s.

Distanza $d(r,s) = \left\|\vec{RS}\right\|$, essendo R ed S i punti di r ed s tali che $\vec{RS}$ risulti ortogonale sia ad r, sia ad s. Si trova R(1/7, 41/21, 4/21); S(31/105, 173/105, 0); $d(r,s)=\dfrac{4}{\sqrt{105}}$.