FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27-01-2009 **Compito A**

I) Sia $T: R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - 2x_4, 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4, 2x_1 + x_2 - 4x_4).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3 e di R^4;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) la controimmagine, attraverso T, del vettore $\underline{v}(3,4,1)$;
f) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$;
g) un sottospazio W tale che $W \oplus \mathrm{Im}(T) = R^3$.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 2 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ kx - 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=1

III) In R^3 sono dati il punto P(2,-1,0), la retta r: x = 4t, y = 2t + 3, z = t e il piano π: 3x – z + 2 = 0.

Determinare:

a) il piano π' passante per P e perpendicolare a r;
b) il piano γ passante per P e parallelo a π;
c) la retta s passante per P e perpendicolare a π;
d) le rette passanti per P e parallele a π;
e) la distanza di P da π;
f) il piano α contenente P ed r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Soluzione

I)

a) $T = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$.

b) Dim(KerT)= 4-2 =2.

$$KerT = \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$, si ottiene $x_1=-\alpha+2\beta$, $x_2=2\alpha$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$.
Una base è $\{{}^t(111,2,1,0), {}^t(2,0,0,1)\}$.

c) Dim(ImT)=2, Una base è formata da due colonne (libere) di T, per es. 2ª e 3ª.
Eq. parametriche **$x = \beta$, $y = -\alpha+5\beta$, $z = \alpha$**. **Eq. cart. : $5x-y-z = 0$**.

d) La T non è iniettiva (KerT $\neq \{\underline{0}\}$ e non è suriettiva (ImT$\neq \boldsymbol{R}^3$, codom di T).

e) La controimmagine $T^{-1}(\underline{v})$ di $\underline{v}$ è l'ins. dei vettori di $\boldsymbol{R}^4$ che T applica in $\underline{v}$.
Ciò richiede che $\underline{v}$ appartenga a ImT. Siccome ciò è falso, $T^{-1}(\underline{v}) = \emptyset$ (insieme vuoto). Confronta col teorema di Rogchè-Capelli.

f) Le equazioni parametriche di U sono: $x_1= 3\alpha-\beta$, $x_2=3\alpha$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$;
una base di U è $\{\underline{u}_1={}^t(3,3,1,0), \underline{u}_2={}^t(-1,0,0,1)\}$, perciò
$T(U) = \{\alpha.T(\underline{u}_1) + \beta.T(\underline{u}_2)\} = \{\alpha.{}^t(4,11,9)+\beta.{}^t(-3,-9,-6)\}$.
Siccome $T(\underline{u}_1)$ e $T(\underline{u}_2)$ sono lin. indipendenti, T(U)=ImT, perché…(Verifica).

g) Essendo dim(ImT)=2, W deve avere dim=1; inoltre $W \cap ImT=\{\underline{0}\}$.
Posto $W=\{\lambda.{}^t(l,m,n)\}$, l'equazione $5l\lambda-m\lambda-n\lambda = 0$, cioè $(5l-m-n)\lambda = 0$, deve avere l'unica soluzione $\lambda = 0$, il chè → $5l-m-n \neq 0$. Perciò di sottospazi come W ce ne sono infiniti, per es. $W==\{\lambda.{}^t(1,0,0)\}$, oppure $W'==\{\lambda.{}^t(5,-1,-1)\}$, eccetera. A proposito: chi è W' ?

II)
a)
$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & k & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ k & -2 & -1 & 1 \end{array}$$
Scambio le prime due colonne, per cui la **1ª incognita sarà y e la 2ª x**:

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & k & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & k & -1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & k & 2 \\ 0 & 7 & (2k+1) & 3 \\ 0 & (k-4) & (-2k-1) & -3 \end{array} \to \begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & k & 2 \\ 0 & 7 & (2k+1) & 3 \\ 0 & (k+3) & 0 & 0 \end{array}.$$

1° caso: $k = -3$: la 3ª riga porge $0 = 0$: sistema con ∞^1 soluzioni. Posto $x=\lambda$,
$z= (-3+7\lambda)/5$, $y= -2+2\lambda - 3((-3+7\lambda)/5 = (-1 -11\lambda)/5$ e ordinando:

$$x = \lambda, y = \frac{-11\lambda - 1}{5}, z = \frac{7\lambda - 3}{5}$$

2° caso: $k \neq -3$. Se $k = -1/2$, la 2< riga dà **$x = 3/7$**, la 3ª dà **$x = 0$** → sist. incompatibile.
3° caso: $k \neq -3$ e $k \neq -1/2$. In tal caso il sistema è compatibile e determinato: $x = 0$,
$z = 3/(2k+1)$, $y = -2 +3k/(2k+1) = (-k-2)/(2k+1)$ e ordinando:

$$x = 0, y = \frac{-k-2}{2k+1}, z = \frac{3}{2k+1}$$

b) Per $k = 1$: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

III) Equaz. cartesiame di r: $x-4z = y-2z-3 = 0$. (Servono in seguito: punto f).
a) π' : $4(x-2)+2(y+1)+z = 0 \to 4x+2y+z -6 = 0$.
b) γ : $3(x-2) -z = 0 \to 3x -z -6 = 0$.
c) s : $x= 2+3\lambda$, $y= -1$, $z= - \lambda$.
d) stella di rette di centro P: $x=2+lt$, $y= -1+mt$, $z=nt$; impongo che ${}^t(l,m,n)$ appartenga al sottospazio $3x-z=0$ di π: $3l-n00 \to n=3l$ e il fascio è
$x=2+lt$, $y= -1+mt$, $z=3lt$. (Verifica che le rette di tale fascio giacciono su γ).

e) $d(P, \pi)=\dfrac{|3.2-0+2|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}$.

f) Per trovare α : **1°** fascio di piani di asse r. $\lambda(x-4z)+\beta(y-2z-3)=0$;
2° impongo il passaggio per P:
$\lambda(2)+\beta(-1-3)=0 \rightarrow \lambda=2\beta$ e perciò il piano α è $2x-8z+y-2z-3=0$ ovvero: $2x+y-10z-3=0$.

IV)

a) $\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ -1 & (1-\lambda) & -1 \\ 2 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2]=0 \rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0.$

Perciò gli autovalori sono $\boldsymbol{\lambda = 2}$, m.a. = 2 e $\boldsymbol{\lambda = 3}$, m.a.= 1.

b) Autospazi. U_2 per $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 0,0,0 \\ -1,-1,-1 \\ 2,2,2 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \rightarrow U_2: x+y+z=0\text{ , dim }=2\text{, una base }=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

U_3 per $\lambda=3$:

$$\begin{pmatrix} -1,0,0 \\ -1,-2,-1 \\ 2,2,1 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \rightarrow U_3:\begin{cases} x=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \rightarrow \text{dim }=1\text{, una base }=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

c) Siccome le motelicità geometriche (dim. degli autospazi) sono uguali alle rispettive m.a. (molteplicità algebriche), A è diagonalizzabile.

Una matrice diagonale è $D=\begin{pmatrix} 2,0,0 \\ 0,2,0 \\ 0,0,3 \end{pmatrix}$

e una diagonalizzante è $P=\begin{pmatrix} 1,1,0 \\ -1,0,1 \\ 0,-1,-2 \end{pmatrix}$.

Facoltativo: verificare che $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$.