FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria
Prova scritta del 12/01/2009 traccia B

I) Sia T: R^4 ----> R^3 l'applicazione lineare definita da
$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+2x_2 +3x_3,\ x_1+ x_3+2x_4,\ x_2+ x_3-x_4)$.
Determinare:
a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3e di R^4;
b) equazioni cartesiane di KerT , una base e la dimensione di KerT;
c) equazioni parametriche di ImT , una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'intersezione tra KerT e il sottospazio U: $x_1+2x_2+x_3-x_4=0$;
f) il complemento ortogonale di ImT con base e dimensione.

II)
a) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} kx + 2y + k z = 3 \\ kx + 2y + 2z = 6 \\ 2x + 4y + 3z = 9 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=3.

III) In R^3, sono dati il punto P(1,0,–1) e la retta r : x=2+t, y=t, z=1–2t.
Determinare:
a) la retta r' passante per P e parallela a r ;
b) il piano π passante per P e perpendicolare a r ;
c) il piano π' contenente P ed r;
d) la retta s passante per P, perpendicolare e incidente a r ;
e) le rette passanti per P e perpendicolari a r ;
f) il sottospazio vettoriale di dimensione 1 parallelo a r .

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale forma diagonale D che rappresenti l'operatore A
e la sua eventuale matrice diagonalizzante.

Alcuni risultati

I)
b) Dim(kerT)=2; kerT = $\{a.{}^t(-2,1,0,1)+b.{}^t(-3,0,1,1)\}$.
c) Dim(ImT)=2; ImT = $\{a.{}^t(1,1,0)+b.{}^t(2,0,1)\}$ → x-y-2z=0 (eq. cartes).
e) Dim(KerT)=2 e dim(U)=3 → dim(KerT∩U) ≤ 2; se fosse dim(KerT∩U)=2, sarebbe KerT∩U = KerT → KerT ⊆ U; ma ciò non è, perché c'è almeno un vettore(di base) di KerT che non appartiene ad U [${}^t(-2,1,0,1) \notin$ U: $x_1+2x_2+x_3-x_4=0$]. Si conclude che dim(KerT∩U)=1.

Infatti, fatti calcoli, $KerT \cap U = \{\lambda.{}^t(3,-3,1,-2)\}$.

f) Il compl. ortogonale di ImT è {x=t, y=t, z=-2t}, dim=1 (ovvio).

II)

a) Per k=2 il sistema è incompatibile.

Per k=1 si hanno ∞^1 soluzioni: x= 2λ, y= –λ, z=3. [1]

Per k≠2 e k≠1 il sist. è determinato:

$$x = \frac{-3}{2(2-k)}, y = \frac{3(4-3k)}{4(2-k)}, z = \frac{3}{2-k}. \quad [2]$$

b) Per k=3 si ha $x = \frac{3}{2}, y = \frac{15}{4}, z = -3.$

Nota. Si osservi che, per k=1, le [2] danno $x=\frac{-3}{2}$, $y=\frac{3}{4}$, z = 3, soluzione che si ricava dalle [1] per $\lambda = \frac{-3}{4}$.

III)

c) Piano π' = P+r : 1°) fascio di piani di asse r; 2°) passaggio per P; si ottiene π' : 2x-4y-z-3 = 0.

d) Retta s per P incidente e perpendicolare ad r.

1°) retta per P e per il punto generico R di r [R(2+t, t, 1-2t)];

2°) determinare il vettore $\overrightarrow{PR}$ =R–P;

3°) Imporre che il prodotto scalare tra il vettore $\overrightarrow{PR}$ e il vettore direttore $\vec{r}$ di r sia zero.

Si ottiene s : x=1+3λ, y= λ, z= –1+2 λ.

Nota Si osservi che la norma di $\overrightarrow{PR}$ fornisce la distamza tra P ed r. ($\frac{1}{2}\sqrt{14}$).

e) Sono ∞^1 rette (fascio di rette di centro P giacenti nel piano π). Procedura:

1°) Stella di rette di centro P;

2°) imporre la perpendicolarità con r.

f) Il sottospazio di dim=1 parallelo ad r è il sottospazio direttore di r (parallela ad r per O). (eliminare i <u>termini noti</u> da r).

IV)

a) Autovalori: λ = –1 con m.a.=2, λ =5 con m.a.=1.

b) Autospazi: U_{-1} : dim=2, una base è $\{{}^t(2,0,-1), {}^t(0,1,0)\}$.

U_5 : dim=1, una base è $\{{}^t(1,1,1)\}$.

c) A è diagoalizzabile perché le dim geometriche uguagliano le dim algebriche.

Una matrice diagonale è

$$D= \begin{matrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \quad \text{una diagonalizzante di D è } P= \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}.$$

Complemento. Verificare che AP = PD. E' un caso o è una proprietà generale?