FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria
Prova scritta del 12/01/2009 traccia A

I) Sia T: R^4 ----> R^3 l'applicazione lineare definita da
$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+3x_2+4x_3,\ x_1+x_3+3x_4,\ x_2+x_3-x_4)$
Determinare:
a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3 e di R^4;
b) equazioni cartesiane di KerT ,una base e la dimensione di KerT;
c) equazioni parametriche di ImT , una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'intersezione tra KerT e il sottospazio U: $x_1-x_2-x_3+x_4=0$;
f) il complemento ortogonale di ImT con base e dimensione.

II)
a) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} kx + 2y + 5z = 13 \\ kx + 2z = 4 \\ ky + 2z = 6 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=1.

III) In R^3, sono dati il punto P(2,–1,0) e la retta r : x=1+2t, y=t, z=2–t.
Determinare:
a) la retta r' passante per P e parallela a r ;
b) il piano π passante per P e perpendicolare a r ;
c) il piano π' contenente P e r ;
d) la retta s passante per P, perpendicolare e incidente a r ;
e) le rette passanti per P e perpendicolari a r ;
f) il sottospazio vettoriale di dimensione 1 parallelo a r .

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale forma diagonale D che rappresenti l'operatore A
e la sua eventuale matrice diagonalizzante.

Soluzione

I)
a) $$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \text{Rango(T)}=2 \rightarrow \dim(\text{KerT})=4-2=2.$$

b) KerT: $\{x_1+3x_2+4x_3=0, x_2+x_3-x_4=0\}$. (Eq. cartesiane)
Posto $x_4=\beta$, $x_3=-\alpha$, ho $x_2=\alpha+\beta$, $x_1=-3(\alpha+\beta)-4(-\alpha)=\alpha-3\beta\}$. (Eq. parametriche)
Perciò una base(KerT) è $\{{}^t(1,1,-1,0), {}^t(-3,1,0,1)\}$.

c) ImT: dim=2, perciò una base è formata da due colonne di T lin. indip, per es. 1ª e 2ª
Eq. parametriche: $\{x=\alpha+3\beta, y=\alpha, z=\beta\}$; eq. cartesiana: $x-y-3z=0$.

d) T non è iniettiva($KerT\neq\{\underline{0}\}$) e non è suriettiva ($ImT\neq R^3$, codominio di T).

e) Per determinare $KerT \cap U$ conviene inserire le equaz. parametriche di KerT nell'eq. cartesiana di U. Si ricava $(\alpha-3\beta)-(\alpha+\beta)-(-\alpha)+\beta=0 \rightarrow \alpha-3\beta=0 \rightarrow \alpha=3\beta$.
Si conclude che $KerT \cap U$ è $\{{}^t(0, 4\beta, -3\beta, \beta)\}$, dim=1, una base è$\{{}^t(0,4,-3.1)\}$.

f) Il compl. ortogonale di ImT è formato da tuti i vettori $(x,y,z) \in R^3$ ortogonali ai vettori di base di ImT: $/\{(x,y,z).{}^t(1,1,0)=0, (x,y,z).{}^t(3,0,1)=0\} \rightarrow \{x+y=0, 3x+z=0\}$
e posto x=t, y=-t, z=-3t, segue che il compl. Ortogonale di Imt ha dim.=1
e una sua base è $\{{}^t(1,-1,-3)\}$.
Nota. Come si sarebbero potuti ottenere questi risultati senza fare calcoli?.
Complemento. Determinare analogamente il complemento ortogonale di KerT.

II)

a)
$$\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 5 & 13 \\ k & 0 & 2 & 4 \\ 0 & k & 2 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} k & 2 & 5 & 13 \\ 0 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & k & 2 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & k & 2 & 6 \end{array} \text{ (ho sommato alla 1ª riga la 2ª)} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & (2-3k/2) & (6-9k/2) \end{array}$$

1° caso: k=4/3 ; la 3ª riga fornisce 0 = 0, ∞^1 soluzioni: $z=\lambda$, $y=(9-3\lambda)/2$, $x=3(4-2\lambda)/4$.

Odinando: $$x=\frac{6-3\lambda}{2}, y=\frac{9-3\lambda}{2}, z=\lambda$$.

2° caso: k=0 ; la 1ª riga dà z=2, la 3ª riga dà z=3, perciò il sistema è incompatibile.

3° caso: $k\neq 0$ e $k\neq 4/3$; il sistema è determinato e $z=(12-9k)/(4-3k)=3$, $y=(9-9)/2=0$, $x=(4-6)/k=-2/k$. Ordinando: $\mathbf{x=-2/k, y=0, z=3.}$

b) Per k=1 $\mathbf{x=-2, y=0, z=3.}$

III)

a) Equaz. di r' : x= 2+2t, y= -1+t. z= -t.

b) $2(x-2)+(y+1)-z=0 \rightarrow 2x+y-z-3=0$ (eq. di π).

c) Scrivo l'eq. del fascio di piani du asse r e impongo il passaggio per P.
r: t=y, x=1+2y, z=2-y $\rightarrow$ x-2y-1=0, y+z-2=0; fascio: a(x-2y-1)+b(y+z-2)=0.
Passaggio per P: a(2+2-1)+b(-1-2)== $\rightarrow$ b=a, perciò x-y+z-3=0 (eq. di π').

d) Detto R il punto generico di r, R(1+2t, t, 2–t), il vettore <u>**PR**</u> = ${}^t(-1+2t, 1+t, 2-t)$.
La retta PR passa per P ed è incidente ad r; perché sia anche perpendicolare ad r, impongo che <u>**PR**</u> sia ortohonale al vettore direttore <u>**r**</u> di r: ${}^t(-1+2t, 1+t, 2-t).(2,1,-1)$. Segue che $-2+4t+1+t-2+t=0 \rightarrow t=1/2$ e il vettore direttore di s è <u>**PR**</u> = ${}^t(0,3/2, 3/2)$. Le equazioni di s sono : $x=2$, $y=-1+\lambda$, $z=\lambda$.

e) Le rette di centro P perpendicolari ad r formano un fascio di centro P e giacciono nel piano π. Per determinare tale fascio, 1° stella di rette di centro P: $x=2+l\lambda$, $y=-1+m\lambda$, $z=n\lambda$;
2°: $(l,m,n).{}^t(2,1,-1)=0 \rightarrow n=2l+m$. Fascio richiesto: $x=2+l\lambda$, $y=-1+m\lambda$, $z=(2l+m)\lambda$.
Si noti che le rette del fascio dipendono da **un solo parametro** rappresentato dalla coppia *omogenea* $(l,m)\neq(0,0)$.
Nota. Tale fascio ha per asse la retta r' (per P e parallela ad r).

f) Si tratta del sottospazio direttore della retta r: {x=2t, y=t, z= -t}.

IV)

a) Autovalori:

$$\begin{matrix} (2-\lambda) & 1 & -1 \\ 6 & (3-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & (5-\lambda) \end{matrix} \rightarrow (5-\lambda)[\,(2-\lambda)(3-\lambda)-6] = (5-\lambda).(\lambda^2-5\lambda)=0$$

$\rightarrow \lambda.(\lambda-5)^2=0 \rightarrow \lambda=0$, m.a. 1 e $\lambda=5$, m.a. 2.

b) Autospazi:

$$U_0:\ \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}\ \underline{v}=\underline{0} \rightarrow \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix} \rightarrow \{z=0,\ 2x+y=0\},\ \dim(U_0)=0,\ \text{base}=\{{}^t(1,-2,0)\}.$$

$$U_5:\ \begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ \underline{v}=\underline{0} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ \underline{v}=\underline{0} \rightarrow \{3x-y+z=0\},.\ \dim(U_5)=0,$$

Base $=\{{}^t(1,3,0),\ {}^t(0,1,1)\}$.

c) A è diagonalizzabile, perché le molteplicità geometriche degli autovalori (degli autospazi) sono uguali alle molt. Algebriche.
Una matrice diagonale simile ad A è

D= $\begin{pmatrix} 5,0,0 \\ 0,5,0 \\ 0,0,0 \end{pmatrix}$ e una matrice diagonalizzante è P = $\begin{pmatrix} 1,0,1 \\ 3,1,-2 \\ 0,1,0 \end{pmatrix}$.

Complementi.

1) Considerando A come applicazione lineare di $R^3 \rightarrow R^3$ (endomorfismo di R^3), sapreste dire senza calcoli chi è il KerA ?
2) Le matrici D e P precedenti sono univocamente daterminate? Se sì, giustificare; se no, fare degli esempi.