vettori – esercizio n. 7

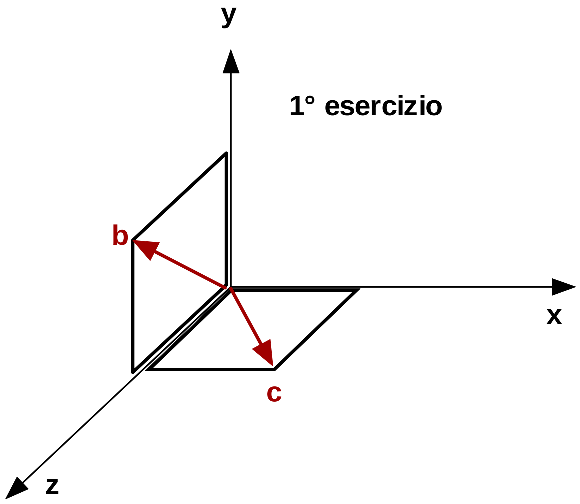
Siano $\overline{b}$ e $\overline{c}$ vettori rappresentanti le diagonali della faccia yz e xz di un cubo di spigolo a.

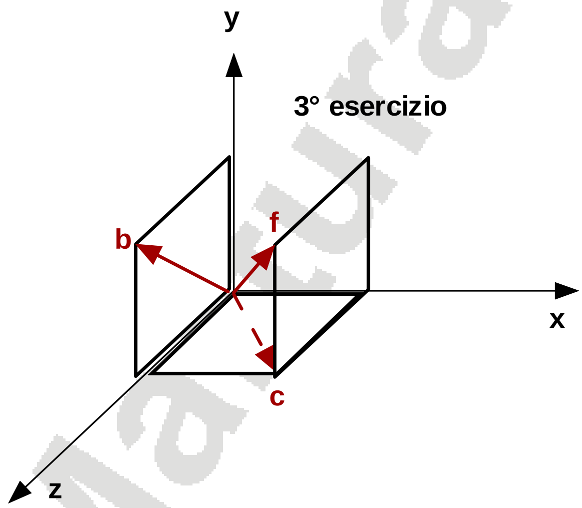
a) Calcolare le componenti del vettore $\overline{d}=\overline{b}\times\overline{c}$ (prodotto vettoriale).

b) Calcolare il valore di $\overline{b}\bullet\overline{c}, \overline{d}\bullet\overline{c}$ e $\overline{d}\bullet\overline{b}$

c) Trovare l'angolo formato dalla diagonale del cubo f e la diagonale della faccia yz, b.

R.: (a^2 , a^2 , – a^2) ; (a , 0 , 0) ; 35°





Esercizio (a) :

Le componenti del vettore $\overline{b}$ e $\overline{c}$ sono:

$$\overline{b}=0\cdot\overline{i}+a\cdot\overline{j}+a\cdot\overline{k}=a\cdot\overline{j}+a\cdot\overline{k}$$

$$\overline{c}=a\cdot\overline{i}+0\cdot\overline{j}+a\cdot\overline{k}=a\cdot\overline{i}+a\cdot\overline{k}$$

Le componenti del prodotto vettoriale $\overline{d}=\overline{b}\times\overline{c}$ risultano essere:

$$\overline{d}=\overline{b}\times\overline{c}=\left(a\cdot\overline{j}+a\cdot\overline{k}\right)\times\left(a\cdot\overline{i}+a\cdot\overline{k}\right)=a^2\cdot\overline{j}\times\overline{i}+a^2\cdot\overline{j}\times\overline{k}+a^2\cdot\overline{k}\times\overline{i}+a^2\cdot\overline{k}\times\overline{k}=$$

$$=-a^2\cdot\overline{k}+a^2\cdot\overline{i}+a^2\cdot\overline{j}+0=a^2\cdot\overline{i}+a^2\cdot\overline{j}-a^2\cdot\overline{k}$$

Esercizio (b) :

- Le componenti del vettore $\overline{b}$ e $\overline{c}$ sono:

$$\overline{b}=a\cdot\overline{j}+a\cdot\overline{k}$$

$$\overline{c}=a\cdot\overline{i}+a\cdot\overline{k}$$

Il valore del prodotto scalare $\overline{b}\bullet\overline{c}$ risulta essere:

$$\overline{b}\bullet\overline{c}=\left(a\cdot\overline{j}+a\cdot\overline{k}\right)\bullet\left(a\cdot\overline{i}+a\cdot\overline{k}\right)=a^2\cdot\overline{j}\bullet\overline{i}+a^2\cdot\overline{j}\bullet\overline{k}+a^2\cdot\overline{k}\bullet\overline{i}+a^2\cdot\overline{k}\bullet\overline{k}=0+0+0+a^2=\mathbf{a^2}$$

- Le componenti del vettore $\overline{d}$ e $\overline{c}$ sono:

$$\overline{d}=a^2\cdot\overline{i}+a^2\cdot\overline{j}-a^2\cdot\overline{k}$$

$$\overline{c}=a\cdot\overline{i}+a\cdot\overline{k}$$

Il valore del prodotto scalare $\overline{d} \bullet \overline{c}$ risulta essere:

$$\overline{d} \bullet \overline{c} = \left(a^2 \cdot \overline{i} + a^2 \cdot \overline{j} - a^2 \cdot \overline{k}\right) \bullet \left(a \cdot \overline{i} + a \cdot \overline{k}\right) =$$

$$= a^3 \cdot \overline{i} \bullet \overline{i} + a^3 \cdot \overline{i} \bullet \overline{k} + a^3 \cdot \overline{j} \bullet \overline{i} + a^3 \cdot \overline{j} \bullet \overline{k} - a^3 \cdot \overline{k} \bullet \overline{i} - a^3 \cdot \overline{k} \bullet \overline{k} = a^3 + 0 + 0 + 0 + 0 - a^3 = \mathbf{0}$$

- Le componenti del vettore $\overline{d}$ e $\overline{b}$ sono:

$$\overline{d} = a^2 \cdot \overline{i} + a^2 \cdot \overline{j} - a^2 \cdot \overline{k}$$

$$\overline{b} = a \cdot \overline{j} + a \cdot \overline{k}$$

Il valore del prodotto scalare $\overline{d} \bullet \overline{b}$ risulta essere:

$$\overline{d} \bullet \overline{b} = \left(a^2 \cdot \overline{i} + a^2 \cdot \overline{j} - a^2 \cdot \overline{k}\right) \bullet \left(a \cdot \overline{j} + a \cdot \overline{k}\right) =$$

$$= a^3 \cdot \overline{i} \bullet \overline{j} + a^3 \cdot \overline{j} \bullet \overline{j} - a^3 \cdot \overline{k} \bullet \overline{j} + a^3 \cdot \overline{i} \bullet \overline{k} + a^3 \cdot \overline{j} \bullet \overline{k} - a^3 \cdot \overline{k} \bullet \overline{k} = 0 + a^3 + 0 + 0 + 0 - a^3 = \mathbf{0}$$

Esercizio (c) :

Le componenti ed i moduli del vettore $\overline{f}$ e $\overline{b}$ sono:

$$\overline{f} = a \cdot \overline{i} + a \cdot \overline{j} + a \cdot \overline{k}$$

$$\overline{b} = a \cdot \overline{j} + a \cdot \overline{k}$$

$$\left|\overline{f}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{3}$$

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{2}$$

Il valore del prodotto scalare $\overline{f} \bullet \overline{b}$ risulta essere:

$$\overline{f} \bullet \overline{b} = \left(a \cdot \overline{i} + a \cdot \overline{j} + a \cdot \overline{k}\right) \bullet \left(a \cdot \overline{j} + a \cdot \overline{k}\right) =$$

$$= a^2 \cdot \left(\overline{i} \bullet \overline{j} + \overline{i} \bullet \overline{k} + \overline{j} \bullet \overline{j} + \overline{j} \bullet \overline{k} + \overline{k} \bullet \overline{j} + \overline{k} \bullet \overline{k}\right) = a^2 \cdot (0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1) = 2 \cdot a^2$$

esso è anche uguale a:

$$\overline{f} \bullet \overline{b} = \left|\overline{f}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\theta$$

pertanto:

$$2 \cdot a^2 = \left|\overline{f}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\theta$$

$$2 \cdot a^2 = a \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \mathbf{35°}$$