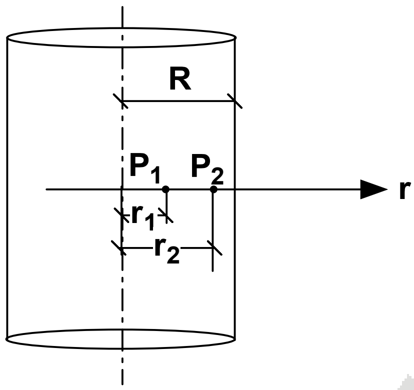
elettrostatica – esercizio n. 25

Una distribuzione spaziale continua e uniforme di densità pari a $\rho = 8{,}0 \cdot 10^{-9}$ C/m^3 ha forma cilindrica di raggio R = 69,3 cm. Determinare la differenza di potenziale $V_{P1} - V_{P2}$ tra due punti P_1 e P_2 distanti dall'asse r_1 = 18,7 cm ed r_2 = 34,3 cm, rispettivamente.
R.: 18,68 V ;



Immaginiamo una distribuzione spaziale cilindrica di raggio r < R.

Poiché la distribuzione volumica ρ delle cariche è continua ed uniforme, allora si verifica che la carica interna vale:

$$q : \pi \cdot R^2 \cdot L = q_i : \pi \cdot r^2 \cdot L$$

$$q_i = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot L}{\pi \cdot R^2 \cdot L} \cdot q = \frac{r^2}{R^2} \cdot q$$

E la sua distribuzione volumica ρ_i risulterà uguale a ρ, infatti:

$$\rho_i = \frac{q_i}{S_i \cdot L} = \frac{q_i}{\pi \cdot r^2 \cdot L} = \frac{\frac{r^2}{R^2} \cdot q}{\pi \cdot r^2 \cdot L} = \frac{q}{\pi \cdot R^2 \cdot L} = \frac{q}{S \cdot L} = \rho$$

Allora la distribuzione lineare delle cariche sarà per una distribuzione cilindrica di raggio r:

$$\lambda_i = \rho \cdot S_i = \rho \cdot \pi \cdot r^2$$

La componente dell'intensità del campo elettrico uscente dalla distribuzione lineare di carica può essere trovata molto facilmente mediante il teorema di Gauss; essa vale:

$$E_{ri} = \frac{2 \cdot k \cdot \lambda_i}{r}$$

Dalla definizione di differenza di potenziale:

$$dV = -\bar{E} \bullet d\bar{s} = -E_{ri} \cdot dr = -\frac{2 \cdot k \cdot \lambda_i}{r} \cdot dr = -2 \cdot k \cdot \lambda_i \cdot \frac{dr}{r} = -2 \cdot k \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dr}{r} = -2 \cdot k \cdot \rho \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

Integrando tra P_1 e P_2 si ottiene:

$$V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{P_2}^{P_1} dV = \int_{r_2}^{r_1} -2 \cdot k \cdot \rho \cdot \pi \cdot r \cdot dr = -2 \cdot k \cdot \rho \cdot \pi \cdot \int_{r_2}^{r_1} r \cdot dr = -2 \cdot k \cdot \rho \cdot \pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_2}^{r_1} = k \cdot \rho \cdot \pi \cdot \left(r_2^2 - r_1^2 \right) =$$

$$= k \cdot \rho \cdot \pi \cdot \left(r_2^2 - r_1^2 \right) = 8{,}988 \cdot 10^9 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-9} \cdot \pi \cdot \left[\left(34{,}3 \cdot 10^{-2} \right)^2 - \left(18{,}7 \cdot 10^{-2} \right)^2 \right] = 18{,}68 \text{ V}$$