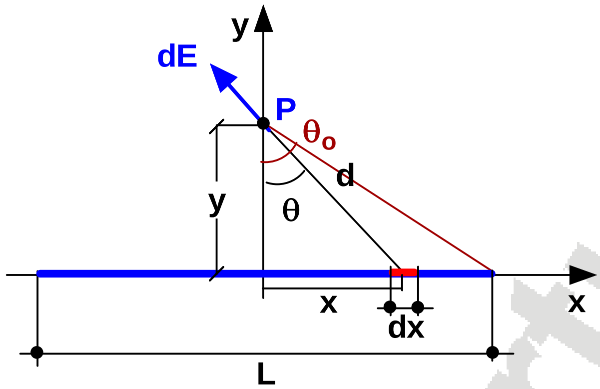
Un elettrone viene posto in quiete sull'asse di una sbarretta di lunghezza L molto grande, uniformemente carica con densità λ, ad una distanza y dal centro della sbarretta. Determinare il modulo della forza elettrostatica a cui è soggetto l'elettrone, assumendo L >> y. (λ =75,0·10^9 C/m, y = 438,0 cm, e = –1,6·10^{-19} C.
R.: 49,26 N ;



L'elettrone è posto sull'asse delle y nel punto P.

Una carica infinitesima dq posta sulla sbarretta per una lunghezza infinitesima dx vale:

$$dq = \lambda \cdot dx$$

Il modulo dell'intensità del campo elettrico nel punto P, generato da questa carica infinitesima, vale:

$$dE = k \cdot \frac{dq}{d^2} = k \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{d^2}$$

La direzione del campo elettrico è quella riportata in figura. Il campo elettrico dE si può immaginare scomposto nelle sue componenti rispetto all'asse delle x e delle y. Di queste due componenti solo quella diretta lungo l'asse delle y darà contributo, infatti quella diretta lungo l'asse x sarà compensata in modo esatto da un altra carica infinitesima dq che rispetto alla precedente sia in posizione simmetrica rispetto all'asse delle y.

Allora il valore della componente del campo elettrico rispetto all'asse delle y sarà:

$$dE_y = k \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{d^2} \cdot \cos\theta = k \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{d^2} \cdot \frac{y}{d} = k \cdot \frac{\lambda \cdot y}{d^3} \cdot dx$$

La distanza x a cui si trova l'elemento dx è legata all'angolo θ dalla relazione:

$$x = y \cdot tg\,\theta$$

per cui differenziando primo e secondo membro, si ha:

$$dx = y \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = y \cdot \frac{d^2}{y^2}\, d\theta = \frac{d^2}{y}\, d\theta$$

Sostituendo dx nell'espressione di dE_y, si ha:

$$dE_y = k \cdot \frac{\lambda \cdot y}{d^3} \cdot dx = k \cdot \frac{\lambda \cdot y}{d^3} \cdot \frac{d^2}{y} \cdot d\theta = \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \frac{y}{d}\ d\theta = \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \cos\ \theta \cdot d\theta$$

La componente y totale dell'intensità di campo elettrico è il doppio dell'integrale dell'espressione precedente, integrata tra $\theta = 0$ e $\theta = \theta_o$.

$$E_y = 2 \cdot \int_0^{\theta_o} dE_y = 2 \cdot \int_0^{\theta_o} \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \cos\ \theta \cdot d\theta = 2 \cdot \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \int_0^{\theta_o} \cos\ \theta \cdot d\theta = 2 \cdot \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \left[\text{sen}\ \theta\right]_0^{\theta_o} = 2 \cdot \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \text{sen}\ \theta_o$$

Se accade che L >> y allora l'angolo θ_o tende a 90° e pertanto si ha:

$$E_y = 2 \cdot \frac{k \cdot \lambda}{y} \cdot \text{sen}\ 90° = 2 \cdot \frac{k \cdot \lambda}{y}$$

Volendo pertanto determinare il modulo della forza elettrostatica in tale situazione, si ha:

$$F_y = e \cdot E_y = e \cdot 2 \cdot \frac{k \cdot \lambda}{y} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot \frac{8{,}99 \cdot 10^9 \cdot 75 \cdot 10^9}{438{,}0 \cdot 10^{-2}} = 49{,}26\ \text{N}$$