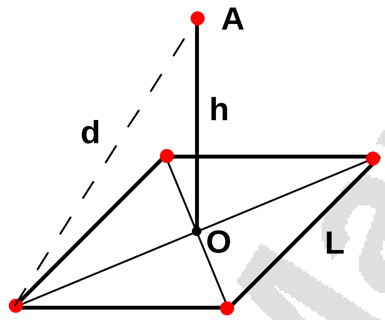
Quattro protoni ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) sono disposti ai vertici di un quadrato di lato $L = 2 \cdot 10^{-9}$ m.
Un altro protone si trova inizialmente in A, sulla perpendicolare al quadrato passante per il suo centro O, ad una distanza OA = h = $2 \cdot 10^{-9}$ m .Calcolare:
a. L'energia potenziale del quinto protone in funzione della distanza h dal centro.
b. La minima velocità iniziale che il quinto protone deve avere in A per raggiungere il centro.
c. L'accelerazione in A ed in C.

R.: $U_p = 4 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{q^2}{\sqrt{\frac{L^2}{2} + h^2}}$ **; $1{,}82 \cdot 10^4$ m/s ; $7{,}50 \cdot 10^{16}$ m/s^2 ; 0 ;**



a. Calcolo dell'energia potenziale del quinto protone in funzione della distanza h dal centro.

Occorre calcolare l'energia potenziale del protone posto in A rispetto a ciascun singolo protone posto in ciascun vertice del quadrato. Per il principio di sovrapposizione degli effetti occorre poi sommare le quattro energie potenziali ottenute. Data la particolare simmetria di figura sarà sufficiente effettuare il calcolo una sola volta e quadruplicarne il risultato.
Per procedere occorre stabilire quanto vale la distanza d del protone in A da un vertice del quadrato:

$$d = \sqrt{h^2 + \left(\frac{L \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{L^2}{2}}$$

$$U_p = 4 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{q \cdot q}{d} = 4 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{q^2}{\sqrt{h^2 + \frac{L^2}{2}}}$$

b. Calcolo della minima velocità iniziale che il quinto protone deve avere in A per raggiungere il centro.

Ricordiamo che in ogni punto del campo, per qualsiasi carica in esso presente, l'energia totale (somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale) deve rimanere costante, pertanto si avrà:
Nel punto A, ricordando che h = L:

$$U_{totale\ A} = U_{potenziale\ A} + U_{cinetica\ A} = 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{\sqrt{h^2 + \frac{L^2}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{L \cdot \sqrt{1{,}5}} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Nel punto O:

$$U_{\text{totale O}} = U_{\text{potenziale O}} + U_{\text{cinetica O}} = 4 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{q^2}{\sqrt{\frac{L^2}{2}}} + 0 = 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{L \cdot \sqrt{0,5}}$$

Dall'eguaglianza tra le due si ha:

$$U_{\text{totale A}} = U_{\text{totale O}}$$

$$4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{L \cdot \sqrt{1,5}} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{L \cdot \sqrt{0,5}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{L \cdot \sqrt{0,5}} - 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{L \cdot \sqrt{1,5}}\right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot k \cdot q^2}{m \cdot L}\left[\frac{1}{\sqrt{0,5}} - \frac{1}{\sqrt{1,5}}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 8,99 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}\left[\frac{1}{\sqrt{0,5}} - \frac{1}{\sqrt{1,5}}\right]} = \sqrt{55,12 \cdot 10^7 \cdot 0,60} = 1,82 \cdot 10^4 \ m/s$$

c. Calcolo dell'accelerazione in A ed in C.

Per calcolare l'accelerazione in A ed in O occorre calcolare la risultante di tutte le forze agenti in A ed in O. Cominciamo subito col dire che la risultante delle forze agenti in O è nulla per la particolare simmetria dell'esercizio, mentre la risultante in A sarà pari al quadruplo della componente verticale della forza agente fra la carica posta in A e quella posta ad uno dei vertici del quadrato, compensandosi invece le componenti orizzontali.

$$F_R = 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{d^2} \cdot \text{sen}\left(\text{arctg}\frac{L}{\frac{L \cdot \sqrt{2}}{2}}\right) = 4 \cdot k \cdot \frac{q^2}{\left(\sqrt{L^2 + \frac{L^2}{2}}\right)^2} \cdot \text{sen}\left(\text{arctg}\frac{L}{\frac{L \cdot \sqrt{2}}{2}}\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot k \cdot q^2}{1,5 \cdot L^2} \cdot \text{sen}\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{4 \cdot 8,99 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,5 \cdot (2 \cdot 10^{-9})^2} \cdot \text{sen}\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right) = 12,53 \cdot 10^{-11} \ N$$

Ed ora è possibile calcolare l'accelerazione in A:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{12,53 \cdot 10^{-11}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 7,50 \cdot 10^{16} \ m/s^2$$