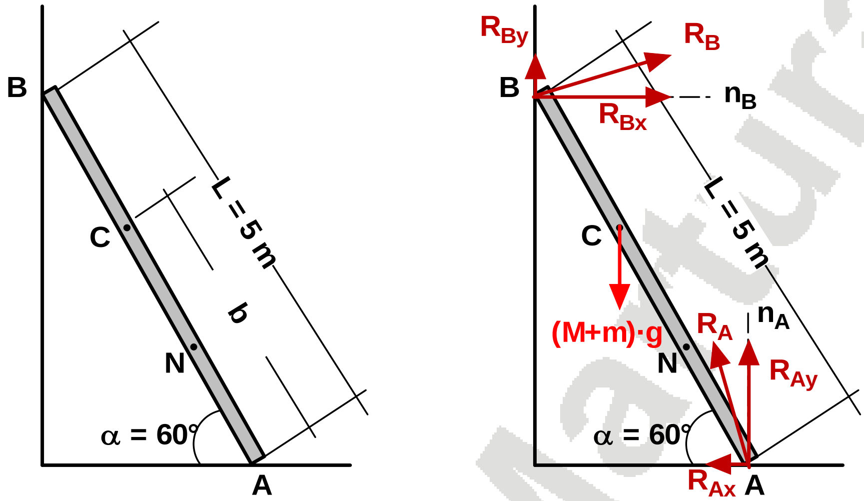
momento – esercizio n. 17

Una scala AB lunga L = 5 m è appoggiata in A sul pavimento ed in B sulla parete formando un angolo α = 60° con l'orizzontale. Si chiede fino a quale punto C della scala può salire un operaio, la cui massa M = 75 Kg e che reca sulle spalle un carico m = 25 kg senza che la scala scivoli. Si chiede inoltre il valore del coefficiente di attrito per il quale la scala sia tutta percorribile. Si trascuri la massa della scala. Il coefficiente di attrito tra la scala ed il pavimento e tra la scala e la parete sia μ = 0,35.
R.: 3,25 m ; 0,577 ;



Cominciamo con il ricordare che i coefficienti di attrito tra la scala ed il pavimento e tra la scala e la parete sono identici per cui si deve verificare che:
$R_{Ax} = \mu \cdot R_{Ay}$
$R_{By} = \mu \cdot R_{Bx}$

Consideriamo l'equilibrio di tutte le forze orizzontali:
$R_{Bx} - R_{Ax} = 0$

Consideriamo l'equilibrio di tutte le forze verticali:
$R_{Ay} + R_{By} - (M + m) \cdot g = 0$

Consideriamo la campata AB: sono presenti le reazioni R_{Ax} ed R_{Ay} (che non ci interessano giacché applicheremo il metodo dei momenti $\sum M_i = 0$ proprio intorno al punto A, la forza $(M + m) \cdot g$ e le reazioni R_{Bx} ed R_{By} :
$(M + m) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha - R_{Bx} \cdot L \cdot \text{sen}\,\alpha - R_{By} \cdot L \cdot \cos\alpha = 0$

Facciamo sistema fra tutte le equazioni scritte:

$$R_{Ax} = \mu \cdot R_{Ay}$$
$$R_{By} = \mu \cdot R_{Bx}$$
$$R_{Bx} = R_{Ax}$$
$$R_{Ay} + R_{By} = (M + m) \cdot g$$
$$(M + m) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha = R_{Bx} \cdot L \cdot \text{sen}\alpha + R_{By} \cdot L \cdot \cos\alpha$$

Sostituiamo $R_{Ax} = \mu \cdot R_{Ay}$ in tutte le altre equazioni

$$R_{By} = \mu \cdot R_{Bx}$$
$$R_{Bx} = \mu \cdot R_{Ay}$$
$$R_{Ay} + R_{By} = (M + m) \cdot g$$
$$(M + m) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha = R_{Bx} \cdot L \cdot \operatorname{sen}\alpha + R_{By} \cdot L \cdot \cos\alpha$$

Sostituiamo $R_{By} = \mu \cdot R_{Bx}$ in tutte le altre equazioni

$$R_{Bx} = \mu \cdot R_{Ay}$$
$$R_{Ay} + \mu \cdot R_{Bx} = (M + m) \cdot g$$
$$(M + m) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha = R_{Bx} \cdot L \cdot \operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot R_{Bx} \cdot L \cdot \cos\alpha$$

Sostituiamo $R_{Ay} = \dfrac{R_{Bx}}{\mu}$ in tutte le altre equazioni

$$\frac{R_{Bx}}{\mu} + \mu \cdot R_{Bx} = (M + m) \cdot g$$
$$(M + m) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha = R_{Bx} \cdot L \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$$

Sostituiamo $R_{Bx} = \dfrac{\mu}{1 + \mu^2} \cdot (M + m) \cdot g$ nell'ultima equazione

$$(M + m) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha = \frac{\mu}{1 + \mu^2} \cdot (M + m) \cdot g \cdot L \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$$

Da cui:

$$b \cdot \cos\alpha = \frac{\mu}{1 + \mu^2} \cdot L \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$$

$$b = \frac{\mu}{1 + \mu^2} \cdot L \cdot \frac{(\operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{0{,}35}{1 + 0{,}35^2} \cdot 5 \cdot \frac{(\operatorname{sen}60° + 0{,}35 \cdot \cos 60°)}{\cos 60°} = 3{,}25 \text{ m}$$

Questa è la distanza b definita pericolosa per l'operaio, perché quando quest'ultimo raggiunge il punto C distante 3,25 m dal punto A, la scala inizia il moto di scorrimento.
É interessante notare che nell'espressione di b non compare il carico (M + m)·g , ossia l'operaio può salire fino al punto C comunque caricato. La distanza b dipende soltanto (a parità di lunghezza L della scala) dall'angolo α di inclinazione della stessa e dal coefficiente di attrito μ.

La condizione per la quale l'operaio possa salire fino alla sommità della scala si ricava imponendo che b = L , ovvero che:

$$\frac{\mu}{1 + \mu^2} \cdot \frac{(\operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{\cos\alpha} = 1$$
$$\mu \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \mu) = 1 + \mu^2$$
$$\mu \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$$
$$\mu = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \cot\alpha = \operatorname{tg}(90 - \alpha) = \operatorname{tg}30° = 0{,}577$$

In tal caso la reazione R_A giacerebbe lungo l'asse della scala.