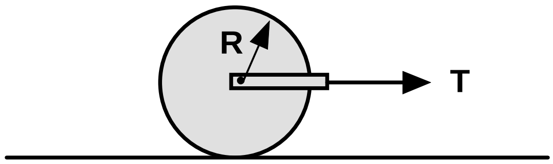
momento – esercizio n. 13

Un rullo cilindrico pieno di massa M e raggio R viene fatto scorrere su di un piano orizzontale mediante l'applicazione di una forza traente T. Si dimostri che per imprimergli una accelerazione costante pari a 2/3·g è necessario che la forza traente T sia uguale al peso P del rullo stesso, trascurando l'attrito e la resistenza dell'aria.
R.: T = P ;



Il lavoro compiuto dalla forza traente T per un certo spazio Δx deve essere uguale alla somma dell'energia cinetica di traslazione e di rotazione intorno all'asse passante per il suo centro di massa:

$$T \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

dove, ovviamente, v sarà la velocità di traslazione del baricentro del cilindro, parallelo al piano di rotolamento, I il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico di rotazione ed ω la velocità angolare di rotazione del rullo intorno al baricentro.

Ricordando che il momento di inerzia di un cilindro pieno di raggio R vale:

$$I = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$

e che:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Sostituendo si ha:

$$T \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2}$$

$$T \cdot \Delta x = \frac{3}{4} \cdot M \cdot v^2$$

Poiché il rullo si muove di moto uniformemente accelerato, le leggi del moto valide sono:

$$v = a \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$$

Ricordando che si desidera che l'accelerazione assuma il valore 2/3·g , sostituendo si ha:

$$T \cdot \Delta x = \frac{3}{4} \cdot M \cdot v^2$$

$$T \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot g \cdot \Delta t^2 = \frac{3}{4} \cdot M \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot g \cdot \Delta t \right)^2$$

$$T \cdot \frac{1}{3} \cdot g \cdot \Delta t^2 = \frac{3}{4} \cdot M \cdot \frac{4}{9} \cdot g^2 \cdot \Delta t^2$$

$$T = M \cdot g$$