momento – esercizio n. 5

Una sbarretta sottile, di massa M e lunghezza L, è inizialmente ferma e poggiata su un piano scabro. Inizia a cadere col punto di contatto bloccato dall'attrito. Quando la sbarretta forma un angolo θ di 30° con la verticale, l'estremo a contatto col piano comincia a scivolare. Calcolare:

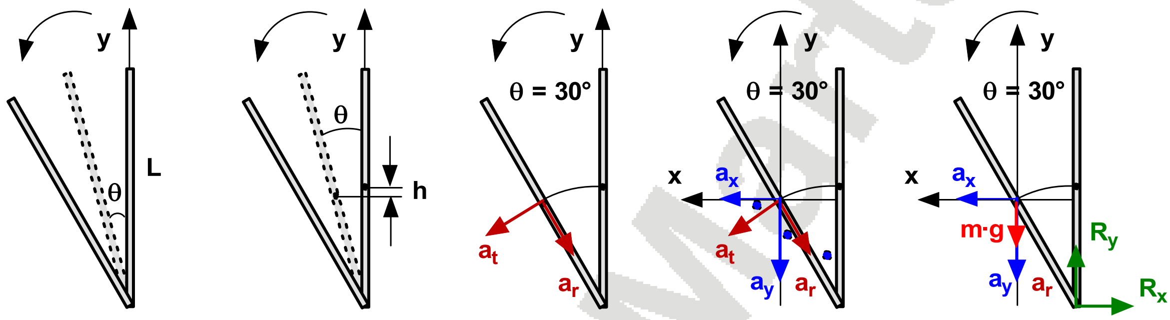
a. In funzione di θ, per θ < 30° , la velocità angolare e l'accelerazione angolare della sbarretta.

b. Per θ = 30°, l'accelerazione radiale e tangenziale del centro di massa della sbarretta.

c. Per θ = 30°, le componenti orizzontale e verticale dell'accelerazione del centro di massa.

d. Il coefficiente di attrito statico.

R.: $\sqrt{3\cdot\frac{g}{L}\cdot(1-\cos\theta)}$; $\frac{3}{2}\cdot\frac{g}{L}\cdot\text{sen}\theta$; $-1{,}97\ m/s^2$; $3{,}68\ m/s^2$; $2{,}20\ m/s^2$; $3{,}54\ m/s^2$; 0,35;



a) Calcolo della velocità angolare

Sulla barra agiscono solo forze conservative come l'energia potenziale gravitazionale (la massa M della barra viene considerata concentrata nel centro di massa) e come l'energia cinetica rotazionale, pertanto:

$$k_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega + 0 = 0 + M\cdot g\cdot h$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\cdot M\cdot g\cdot h}{I}} = \sqrt{\frac{2\cdot M\cdot g}{I}\cdot\frac{L}{2}\cdot(1-\cos\theta)}$$

Conoscendo il momento d'inerzia di una barra rettangolare passante per il suo asse, è possibile ricavare ω_f:

$$I = \frac{M\cdot L^2}{3}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2\cdot M\cdot g}{I}\cdot\frac{L}{2}\cdot(1-\cos\theta)} = \sqrt{2\cdot M\cdot g\cdot\frac{3}{M\cdot L^2}\cdot\frac{L}{2}\cdot(1-\cos\theta)} = \sqrt{3\cdot\frac{g}{L}\cdot(1-\cos\theta)}$$

Ricordando che il momento meccanico risultante agente su un corpo libero in moto intorno ad un certo asse è uguale al prodotto del momento di inerzia rispetto allo stesso asse si rotazione per l'accelerazione angolare, si ha:

$$\sum\tau = I\cdot\alpha$$

$$M\cdot g\cdot\frac{L}{2}\cdot\text{sen}\theta = \frac{M\cdot L^2}{3}\cdot\alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\cdot\frac{g}{L}\cdot\text{sen}\theta$$

b) Calcolo, per θ = 30°, dell'accelerazione radiale e tangenziale del centro di massa della sbarretta.

La componente radiale dell'accelerazione del centro di massa è diretta lungo l'asse della sbarretta e vale proprio l'accelerazione centripeta:

$$a_r = -\omega^2 \cdot R = -3 \cdot \frac{g}{L} \cdot \left(1-\cos\theta\right) \cdot \frac{L}{2} = -\frac{3}{2} \cdot g \cdot \left(1-\cos\theta\right) = -\frac{3}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \left(1-\cos 30°\right) = -1{,}97 \ m/s^2$$

La componente tangenziale dell'accelerazione del centro di massa vale:

$$a_t = \alpha \cdot R = \frac{3 \cdot g}{2 \cdot L} \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \frac{L}{2} = \frac{3}{4} \cdot g \cdot \mathrm{sen}\theta = \frac{3}{4} \cdot 9{,}8 \cdot \mathrm{sen}30° = 3{,}68 \ m/s^2$$

c) Calcolo, per θ = 30°, delle componenti orizzontale e verticale dell'accelerazione del centro di massa.

$$a_x = a_t \cdot \cos 30° - a_r \cdot \mathrm{sen}30° = 3{,}68 \cdot \cos 30° - 1{,}97 \cdot \mathrm{sen}30° = 2{,}20 \ m/s^2$$
$$a_y = a_t \cdot \mathrm{sen}30° + a_r \cdot \cos 30° = 3{,}68 \cdot \mathrm{sen}30° - 1{,}97 \cdot \cos 30° = 3{,}54 \ m/s^2$$

d) Calcolo del coefficiente di attrito statico.

Usando l'espressione ∑ F = m·a , particolarizzata per l'asse delle x e delle y si ha:

$$R_x = M \cdot a_x = 2{,}20 \cdot M$$
$$R_y - M \cdot g = -M \cdot a_y$$
$$R_y = M \cdot g - M \cdot a_y = M \cdot \left(g - a_y\right) = M \cdot \left(9{,}8 - 3{,}54\right) = M \cdot 6{,}26$$

Essendo il coefficiente di attrito statico pari a:

$$\mu_{as} = \frac{F_{as}}{R} = \frac{R_x}{R_y} = \frac{2{,}20 \cdot M}{6{,}26 \cdot M} = 0{,}35$$