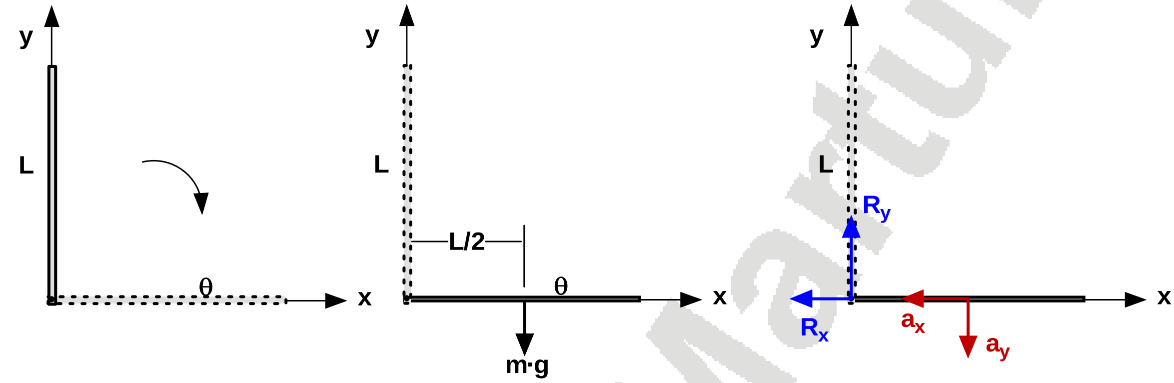
Una barra uniforme di lunghezza L e massa M è imperniata su un asse orizzontale privo di attrito passante per un suo estremo. La barra è rilasciata da ferma in posizione verticale. Nell'istante in cui la barra è in posizione orizzontale, trovare.

a. La sua velocità angolare.
b. Il modulo della sua accelerazione angolare.
c. Le componenti x ed y dell'accelerazione del suo centro di massa.
d. Le componenti della forza di reazione del perno.

R.: $\sqrt{\frac{M \cdot g \cdot L}{I}}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{L}$; $\frac{3}{2} \cdot g$; $\frac{3}{4} \cdot g$; $M \cdot \frac{3}{2} \cdot g$; $M \cdot \frac{1}{4} \cdot g$;



a) Calcolo della velocità angolare

Sulla barra agiscono solo forze conservative come l'energia potenziale gravitazionale (la massa M della barra viene considerata concentrata nel centro di massa) e come l'energia cinetica rotazionale, pertanto:

$$k_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_f^2 + 0 = 0 + M \cdot g \cdot \frac{L}{2}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot L}{I}}$$

Conoscendo il momento d'inerzia di una barra rettangolare passante per il suo asse, è possibile ricavare ω_f:

$$I = \frac{M \cdot L^2}{3}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot L}{I}} = \sqrt{M \cdot g \cdot L \cdot \frac{3}{M \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot g}{L}}$$

b) Calcolo del modulo dell'accelerazione angolare

Ricordando che il momento meccanico risultante agente su un corpo libero in moto intorno ad un certo asse è uguale al prodotto del momento di inerzia rispetto allo stesso asse si rotazione per l'accelerazione angolare, si ha:

$$\sum \tau = I \cdot \alpha$$

$$M \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{g}{L}$$

c) Calcolo delle componenti x ed y dell'accelerazione del suo centro di massa

La componente lungo l'asse x dell'accelerazione del centro di massa è diretta lungo l'orizzontale negativa e vale proprio l'accelerazione centripeta:

$$a_x = a_c = \omega_f^2 \cdot R = \frac{3 \cdot g}{L} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3}{2} \cdot g$$

La componente lungo l'asse y dell'accelerazione del centro di massa è diretta lungo la verticale negativa e vale proprio l'accelerazione tangenziale:

$$a_y = a_t = \alpha \cdot R = \frac{3 \cdot g}{2 \cdot L} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3}{4} \cdot g$$

d) Calcolo delle componenti della forza di reazione del perno

Usando l'espressione $\sum F = m \cdot a$, particolarizzata per l'asse delle x e delle y si ha:

$$R_x = M \cdot a_x = M \cdot \frac{3}{2} \cdot g$$

$$R_y - M \cdot g = -M \cdot a_y$$

$$R_y = M \cdot g - M \cdot a_y = M \cdot g - M \cdot \frac{3}{4} \cdot g = M \cdot \frac{1}{4} \cdot g$$