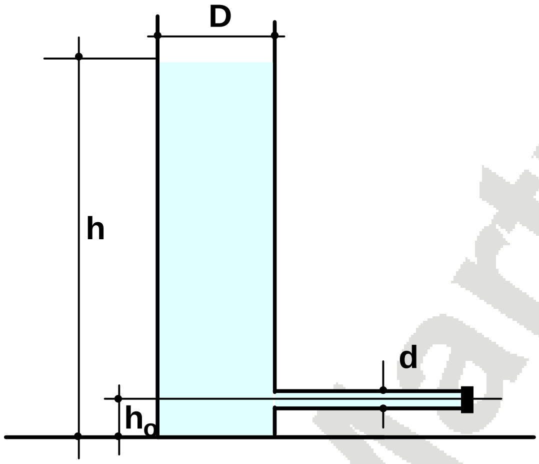
meccanica dei fluidi – esercizio n. 18

Un recipiente è costituito da un cilindro verticale, di diametro D = 9.0 cm, sul quale è innestato un tubo orizzontale, di diametro d = 3.0 cm, con asse ad una distanza h_o = 5.0 cm dal fondo del cilindro. All'altro estremo del tubo orizzontale viene posto un tappo e il recipiente viene riempito di acqua fino all'altezza h = 50 cm.
Supponendo che il piano sul quale poggia il recipiente sia perfettamente liscio, determinare la forza F necessaria per mantenere fermo il recipiente quando viene tolto il tappo.
R.: 6,3 N ;



Nel momento in cui il tappo viene tolto l'acqua prende ad uscire dal tubo orizzontale. Se indichiamo con v e v_o le velocità dell'acqua alle quote h (alla sommità del cilindro verticale) e h_o (all'uscita del tubo orizzontale), con Bernoulli potremo scrivere, ovviamente considerando che la pressione sia la stessa alle imboccature del cilindro e del tubo.

$$\rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot h_o + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_o^2$$

$$h + \frac{v^2}{2 \cdot g} = h_o + \frac{v_o^2}{2 \cdot g}$$

Essendo poi l'acqua un liquido incomprimibile, dall'equazione di continuità segue che:

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_o$$

$$v = \frac{d^2}{D^2} \cdot v_o$$

che sostituita nella precedente ci dà:

$$h + \frac{\left(\frac{d^2}{D^2} \cdot v_o\right)^2}{2 \cdot g} = h_o + \frac{v_o^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{v_o^2}{2 \cdot g} - \frac{\left(\frac{d^2}{D^2} \cdot v_o\right)^2}{2 \cdot g} = h - h_o$$

$$v_o^2 = \frac{2 \cdot g \cdot (h - h_o)}{1 - \frac{d^4}{D^4}}$$

Ora, nel tempo dt la massa d'acqua che esce dal tubo orizzontale è:

$$dm_o = \rho \cdot dV_o = \rho \cdot S_o \cdot v_o \cdot dt = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_o \cdot dt$$

che ha una quantità di moto:

$$d(m_o \cdot v_o) = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_o^2 \cdot dt$$

Di conseguenza il recipiente subisce una variazione di quantità di moto pari a $-d(m_o \cdot v_o)$ e risente di una forza:

$$f = -\frac{d(m_o \cdot v_o)}{dt} = -\rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_o^2$$

Se vogliamo mantenere fermo il recipiente dobbiamo applicare una forza esterna pari a:

$$F = -f = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_o^2 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot (h - h_o)}{1 - \frac{d^4}{D^4}} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{\pi \cdot \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \cdot \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot \left(50 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}\right)}{1 - \frac{\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^4}{\left(9 \cdot 10^{-2}\right)^4}} = \mathbf{6.3\ N}$$