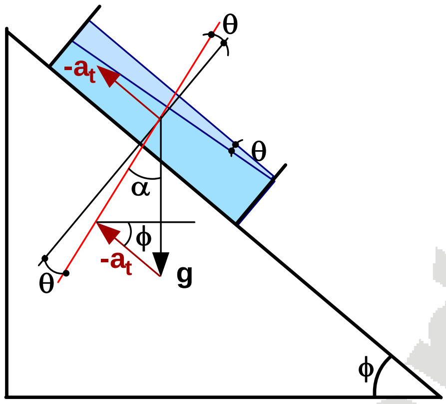
Un recipiente contenente un liquido scivola lungo un piano inclinato formante un angolo φ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito cinetico tra recipiente e piano è μ = 0,15. Si determini l'angolo θ che la superficie libera del liquido forma col piano inclinato durante il moto del recipiente.
R.: 8,53° ;



Nel riferimento solidale col recipiente si ha equilibrio tra le forze di superficie e le forze di volume; queste ultime dovute al peso del liquido e alla forza di trascinamento.
La somma di tali forze è ortogonale alla superficie isobarica (equipotenziale). Si verifica facilmente che nel caso in cui non fosse presente attrito, la superficie libera del liquido sarebbe parallela al piano inclinato. Infatti l'accelerazione di trascinamento è in modulo $a_t = g \sin \varphi$, opposta all'accelerazione con cui si muove il recipiente. La somma dei vettori g e $-a_t$ è ortogonale al piano inclinato e quindi alla superficie libera del liquido.

Nel caso in cui sia presente l'attrito l'accelerazione di trascinamento risulta, in modulo:

$$a_t = g \cdot \text{sen}\ \varphi - \mu \cdot g \cdot \cos\ \varphi$$

La somma dei vettori g e $-a_t$, deve essere ortogonale alla superficie libera del liquido ma non è ortogonale al piano inclinato.

Si consideri l'angolo α che la forza peso forma con la normale alla superficie libera, vedi figura; esso è dato dalla relazione:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a_t \cdot \cos\ \varphi}{g - a_t \cdot \text{sen}\ \varphi}$$

Si verifica immediatamente che in assenza di attrito tg α = tg φ , infatti essendo:

$$a_t = g \cdot \text{sen}\ \varphi$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a_t \cdot \cos\ \varphi}{g - a_t \cdot \text{sen}\ \varphi} = \frac{g \cdot \text{sen}\ \varphi \cdot \cos\ \varphi}{g - g \cdot \text{sen}\ \varphi \cdot \text{sen}\ \varphi} = \frac{g \cdot \text{sen}\ \varphi \cdot \cos\ \varphi}{g - g \cdot \text{sen}^2\ \varphi} = \frac{g \cdot \text{sen}\ \varphi \cdot \cos\ \varphi}{g \cdot \left(1 - \text{sen}^2\ \varphi\right)} =$$

$$= \frac{g \cdot \text{sen}\ \varphi \cdot \cos\ \varphi}{g \cdot \cos^2 \varphi} = \text{tg}\ \varphi$$

Poiché θ = φ – α , si ha:

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}(\varphi-\alpha) = \frac{\text{sen}(\varphi-\alpha)}{\cos(\varphi-\alpha)} = \frac{\text{sen}\ \varphi\cdot\cos\ \alpha - \cos\ \varphi\cdot\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \varphi\cdot\cos\ \alpha + \text{sen}\ \varphi\cdot\text{sen}\ \alpha} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\ \varphi\cdot\cos\ \alpha}{\cos\ \varphi\cdot\cos\ \alpha} - \dfrac{\cos\ \varphi\cdot\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \varphi\cdot\cos\ \alpha}}{\dfrac{\cos\ \varphi\cdot\cos\ \alpha}{\cos\ \varphi\cdot\cos\ \alpha} + \dfrac{\text{sen}\ \varphi\cdot\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \varphi\cdot\cos\ \alpha}} = \frac{\text{tg}\ \varphi - \text{tg}\ \alpha}{1+\text{tg}\ \varphi\cdot\text{tg}\ \alpha}$$

Sostituendo nella precedente relazione il valore di tg α precedentemente ricavato:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a_t\cdot\cos\ \varphi}{g-a_t\cdot\text{sen}\ \varphi}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{tg}\ \varphi - \text{tg}\ \alpha}{1+\text{tg}\ \varphi\cdot\text{tg}\ \alpha} = \frac{\text{tg}\ \varphi - \dfrac{a_t\cdot\cos\ \varphi}{g-a_t\cdot\text{sen}\ \varphi}}{1+\text{tg}\ \varphi\cdot\dfrac{a_t\cdot\cos\ \varphi}{g-a_t\cdot\text{sen}\ \varphi}} = \frac{\text{tg}\ \varphi\cdot(g-a_t\cdot\text{sen}\ \varphi)-a_t\cdot\cos\ \varphi}{g-a_t\cdot\text{sen}\ \varphi+\text{tg}\ \varphi\cdot a_t\cdot\cos\ \varphi} =$$

$$= \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - a_t\cdot\text{sen}\ \varphi\cdot\text{tg}\ \varphi - a_t\cdot\cos\ \varphi}{g-a_t\cdot\text{sen}\ \varphi + a_t\cdot\text{tg}\ \varphi\cdot\cos\ \varphi} = \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - a_t\cdot\left(\dfrac{\text{sen}^2\ \varphi}{\cos\ \varphi}+\cos\ \varphi\right)}{g} =$$

$$= \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - a_t\cdot\left(\dfrac{\text{sen}^2\ \varphi}{\cos\ \varphi}+\dfrac{\cos^2\ \varphi}{\cos\ \varphi}\right)}{g} = \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - \dfrac{a_t}{\cos\ \varphi}}{g}$$

Sostituendo nella precedente relazione il valore di a_t precedentemente ricavato:

$$a_t = g\cdot\text{sen}\ \varphi - \mu\cdot g\cdot\cos\ \varphi$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - \dfrac{a_t}{\cos\ \varphi}}{g} = \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - \dfrac{g\cdot\text{sen}\ \varphi - \mu\cdot g\cdot\cos\ \varphi}{\cos\ \varphi}}{g} = \frac{g\cdot\text{tg}\ \varphi - g\cdot\text{tg}\ \varphi + \mu\cdot g}{g} = \mu$$

$$\text{tg}\ \theta = \mu = 0{,}15$$

$$\theta = \text{arctg}\ 0{,}15 = \mathbf{8{,}53}^\circ$$

Il risultato è interessante ma non sorprendente; infatti nell'accelerazione di trascinamento interviene la forza di attrito che è proporzionale a μ.