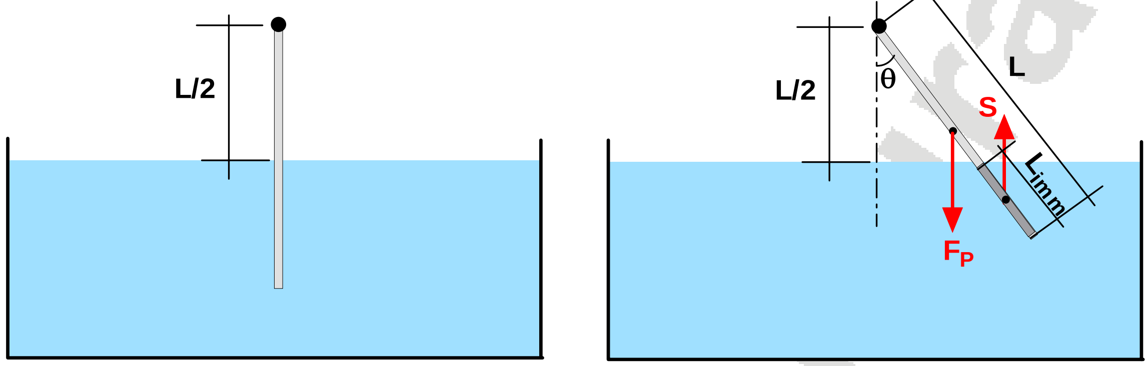
Un'asta di legno uniforme di lunghezza L e massa m = 0,3 kg è libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un estremo, disposto ad un'altezza L/2 sopra la superficie libera dell'acqua contenuta in un grande recipiente. Sapendo che la densità del legno è ρ = 600 kg/m^3, determinare la reazione vincolare sull'asse, quando l'asta è in posizione d'equilibrio.
R.: 0,5 N ; 1,13 N ;



Indicando con S la spinta di Archimede la reazione R vale:

$$R = m \cdot g - S$$

Indicando con A la sezione dell'asta, ρ_a la densità dell'acqua ed L_{imm} la lunghezza immersa dell'asta, si ha:

$$R = \rho \cdot A \cdot L \cdot g - \rho_a \cdot A \cdot L_{imm} \cdot g = A \cdot L \cdot g \cdot \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{L_{imm}}{L}\right) = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{L_{imm}}{L}\right)$$

La posizione verticale dell'asta non è di equilibrio stabile, in quanto il suo baricentro è sopra il centro di spinta. In questa posizione (L_{imm} = L/2) e pertanto risulta:

$$R = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{L_{imm}}{L}\right) = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{L/2}{L}\right) = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_a}{\rho}\right) = 0{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{600}\right) =$$

$$= \mathbf{0{,}5\ \ N}$$

Poiché l'asta è vincolata a ruotare, posizioni di equilibrio stabili sono quelle simmetriche rispetto alla verticale, con un angolo d'inclinazione θ, per il quale la somma dei momenti della forza peso e della spinta, rispetto all'asse di rotazione, è nulla.
Calcoliamo il momento della forza peso ed il momento della spinta di Archimede:

$$-\rho \cdot A \cdot L \cdot g \cdot b_{Fp} + \rho_a \cdot A \cdot L_{imm} \cdot g \cdot b_S = 0$$

$$b_{Fp} = \frac{L}{2} \cdot \text{sen}\ \theta$$

$$b_S = \left(L - \frac{L_{imm}}{2}\right) \cdot \text{sen}\ \theta$$

$$-\rho \cdot A \cdot L \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \text{sen}\ \theta + \rho_a \cdot A \cdot L_{imm} \cdot g \cdot \left(L - \frac{L_{imm}}{2}\right) \cdot \text{sen}\ \theta = 0$$

$$-\rho \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \rho_a \cdot L_{imm} \cdot \left(L - \frac{L_{imm}}{2}\right) = 0$$

$$-\rho \cdot \frac{L^2}{2} + \rho_a \cdot L_{imm} \cdot L - \rho_a \cdot \frac{{L_{imm}}^2}{2} = 0$$

$$-\rho + 2 \cdot \rho_a \cdot \frac{L_{imm}}{L} - \rho_a \cdot \frac{{L_{imm}}^2}{L^2} = 0$$

$$\left(\frac{L_{imm}}{L}\right)^2 - 2 \cdot \frac{L_{imm}}{L} + \frac{\rho}{\rho_a} = 0$$

Risolvendo questa equazione si trova:

$$\frac{L_{imm}}{L} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_a}} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{600}{1000}} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{600}{1000}} = 1 \pm 0,63 = \begin{matrix} 1,63 \\ 0,37 \end{matrix}$$

Scartando ovviamente il segno positivo si ottiene:

$$\frac{L_{imm}}{L} = 0,37$$

Pertanto la reazione vale:

$$R = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{L_{imm}}{L}\right) = 0,3 \cdot 9,81 \cdot \left(1 - \frac{1000}{600} \cdot 0,37\right) = \mathbf{1,13\ N}$$