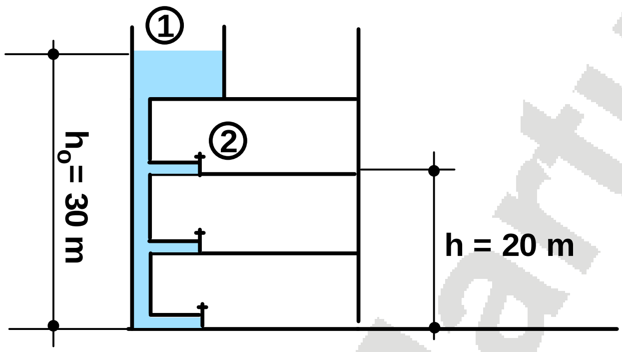
Il livello dell'acqua in un serbatoio sul tetto di un edificio è ad un'altezza da terra h_o = 30,0 m. Il serbatoio fornisce acqua attraverso condutture di sezione S_1 = 20,0 cm^2 ai vari appartamenti. Ogni rubinetto da cui esce acqua ha una sezione di apertura pari a S_2 = 10,0 cm^2. Calcolare:

a. Il tempo necessario per riempire un secchio di 30,0 dm^3 in un appartamento a 20,0 m sopra il livello della strada.

b. La pressione differenziale nella condotta principale, a livello del suolo, a rubinetto chiuso ed a rubinetto aperto.

R.: 2,14 s ; 2,94·10^5 Pa ; 2,21·10^5 Pa ;



Calcolo del tempo necessario per riempire un secchio di 30,0 dm^3 in un appartamento a 20,0 m sopra il livello della strada

Poiché il recipiente è molto largo il livello h_o del liquido diminuisce molto lentamente per cui si può ritenere che la velocità di una particella di liquido nel punto 1 sia v_1= 0 e la pressione p_1 sia uguale a quella atmosferica $p_1 = p_a$.
Indichiamo ancora con v_2 la velocità di una particella di liquido nel punto 2 e con $p_2 = p_a$ la sua pressione. Per l'equazione di Bernoulli si può scrivere:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_o = p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_o - h)}$$

Ora la portata dell'acqua sarà:

$$Q = S_2 \cdot v_2$$

e, per la stessa definizione di portata, il volume del secchio V sarà completamente riempito nel tempo:

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{V}{S_2 \cdot v_2} = \frac{V}{S_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_o - h)}} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot (30 - 20)}} = \mathbf{2{,}14\ s}$$

Calcolo della pressione differenziale a livello del suolo, a rubinetto chiuso ed a rubinetto aperto.

Rubinetto chiuso:
Quando il rubinetto è chiuso la velocità dell'acqua è nulla $v_2 = 0$, pertanto utilizzando l'equazione di Bernouilli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_o = p_{acqua} + 0 + 0$$

$$p_{acqua} - p_a = \rho \cdot g \cdot h_o = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 30 = \mathbf{2{,}94 \cdot 10^5 \ \ Pa}$$

Rubinetto aperto:
Ricaviamo la velocità di uscita dell'acqua a rubinetto aperto sempre nel solito modo, ma questa volta h = 0:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_o = p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_o - h)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_o}$$

Per conoscere la pressione dell'acqua all'interno del tubo occorre conoscere la velocità dell'acqua all'interno del tubo principale v_2^*, velocità che è diversa da quella di uscita appena calcolata v_2, tuttavia ricorrendo all'equazione di continuità:

Utilizzando ancora una volta l'equazione di Bernouilli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_o = p_{acqua} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^{*2} + 0$$

$$p_{acqua} - p_a = \rho \cdot g \cdot h_o - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^{*2} = \rho \cdot g \cdot h_o - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{S_2}{S_1} \cdot v_2 \right)^2 = \rho \cdot g \cdot h_o - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{S_2}{S_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_o} \right)^2 =$$

$$= \rho \cdot g \cdot h_o - \rho \cdot g \cdot h_o \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 = \rho \cdot g \cdot h_o \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 30 \left[1 - \left(\frac{10 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-4}} \right)^2 \right] =$$

$$= \mathbf{2{,}21 \cdot 10^5 \ \ Pa}$$