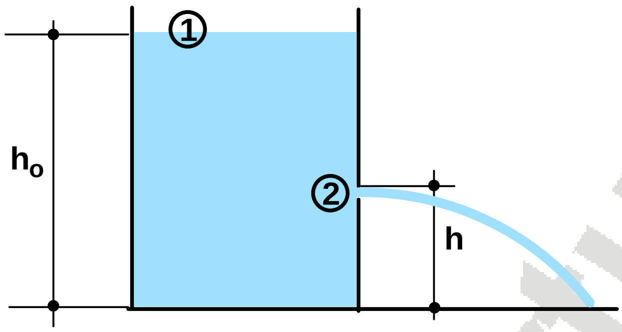
meccanica dei fluidi – esercizio n. 10

Un largo contenitore di raccolta è riempito fino ad un'altezza h_o. Il contenitore ha un buco ad altezza h dal fondo. Trovare un'espressione che descriva a quale distanza dal contenitore arriva il flusso d'acqua. Trovare il valore a cui deve essere praticato il foro per ottenere che la distanza a cui arriva il flusso d'acqua sia massima.

R.: $\sqrt{4\cdot h\cdot(h_o-h)}$ **; $h_o/2$;**



Poiché il recipiente è molto largo il livello h_o del liquido diminuisce molto lentamente per cui si può ritenere che la velocità di una particella di liquido nel punto 1 sia $v_1 = 0$ e la pressione p_1 sia uguale a quella atmosferica $p_1 = p_a$.
Indichiamo ancora con v_2 la velocità di una particella di liquido nel punto 2 e con $p_2 = p_a$ la sua pressione. Per l'equazione di Bernoulli si può scrivere:

$$p_1+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2+\rho\cdot g\cdot h_1=p_2+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot h_2$$

$$p_a+0+\rho\cdot g\cdot h_o=p_a+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot h$$

$$v_2=\sqrt{2\cdot g\cdot(h_o-h)}$$

Ora ciascuna goccia esce dal foro con velocità iniziale v_2 come se fosse un proiettile con componente della velocità orizzontale $v_{2x} = v_2$ e componente verticale v_{2y} nulla. Utilizzando le leggi del moto:

$$y=v_{yo}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

si ha, essendo $y = -h$ e $v_{yo} = 0$:

$$-h=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}$$

e quindi può essere calcolato lo spostamento orizzontale:

$$x=v_{xo}\cdot t=v_{2x}\cdot t=v_2\cdot t=\sqrt{2\cdot g\cdot(h_o-h)}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}=\sqrt{\mathbf{4\cdot h\cdot(h_o-h)}}$$

Per calcolare il valore a cui deve essere praticato il foro per ottenere che la distanza a cui arriva il flusso d'acqua sia massima è sufficiente che la quantità sotto radice nell'espressione della distanza x sia massima; per trovare tale massimo occorre eguagliare a zero la derivata prima, sempre che la derivata seconda per quel valore sia minore di zero.

$$\frac{d\left[4\cdot h\cdot(h_o-h)\right]}{dh}=0 \qquad 4\cdot h_o-8\cdot h=0 \qquad \mathbf{h}=\frac{\mathbf{h_o}}{\mathbf{2}}$$

$$\frac{d^2\left[4\cdot h\cdot(h_o-h)\right]}{dh}<0 \qquad -8<0$$