meccanica dei fluidi – esercizio n. 7

Un palloncino di gomma, che può sopportare una sovrappressione massima Δp = 0,66 atm, è riempito con elio alla pressione atmosferica. Nell'ipotesi di atmosfera isoterma secondo cui la densità dell'aria obbedisce alla legge di Boyle $\rho = \rho_o \cdot p/p_o$, dove ρ_o e p_o sono la densità e la pressione al livello del mare, si calcoli a quale altezza dal suolo il palloncino esploderà. (ρ_o = 1, 29 kg/m^3, p_o = 1 atm)
R.: 8,6 km ;

Fissato un asse z di riferimento rivolto verso l'alto, la variazione infinitesima di pressione è data da:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz = -\rho_o \cdot \frac{p}{p_o} \cdot g \cdot dz$$

Separando le variabili ed integrando si ha:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_o}{p_o} \cdot g \cdot dz$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int -\frac{\rho_o}{p_o} \cdot g \cdot dz$$

$$\ln p = -\frac{\rho_o}{p_o} \cdot g \cdot z + C$$

dove il valore di C si ricava assumendo che per z = 0 si ha che p = p_o:

$$C = \ln p_o$$

$$\ln p = -\frac{\rho_o}{p_o} \cdot g \cdot z + \ln p_o$$

$$\ln \frac{p}{p_o} = -\frac{\rho_o}{p_o} \cdot g \cdot z$$

Ma la pressione alla quale il palloncino esplode p = p_o – Δp e pertanto sostituendo nell'ultima relazione ricavata:

$$\ln \frac{p_o - \Delta p}{p_o} = -\frac{\rho_o}{p_o} \cdot g \cdot z$$

$$z = -\frac{p_o}{\rho_o \cdot g} \cdot \ln \frac{p_o - \Delta p}{p_o} = -\frac{1{,}013 \cdot 10^5}{1{,}29 \cdot 9{,}81} \cdot \ln \frac{1{,}013 \cdot 10^5 - 0{,}66 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5}{1{,}013 \cdot 10^5} = \mathbf{8{,}6\ km}$$