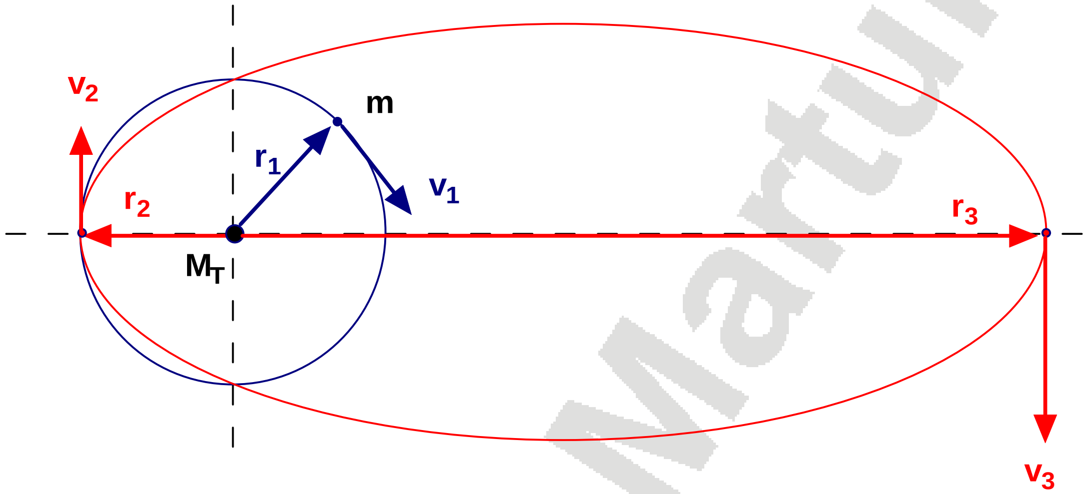
la gravitazione – esercizio n. 8

Un'astronave ruota inizialmente intorno alla Terra su un'orbita circolare di raggio r_1 = 6500 km. Successivamente, dopo aver acceso i motori per un brevissimo intervallo di tempo, l'astronave acquista una velocità v_2 tale da portarla sull'orbita ellittica mostrata in figura. I vertici vicino e lontano di tale orbita hanno distanza dal centro della Terra ($M_T = 6.0\cdot 10^{24}$ kg) pari a $r_2 = r_1$ e r_3 = 30000 km.
Determinare:
a. la velocità v_1 dell'astronave mentre percorre l'orbita circolare iniziale.
b. le velocità v_2 e v_3 dell'astronave quando si trova nei vertici vicino e lontano dell'orbita ellittica.
R.: $1{,}01\cdot 10^4$ m/s ; $2{,}18\cdot 10^4$ m/s ;



L'orbita iniziale è circolare e quindi la forza con la quale l'astronave è attratta dalla Terra deve essere pari alla forza centripeta. Cioè, essendo $G = 6{,}672\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²:

$$F = m\cdot a_c$$

$$\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_1^2} = \frac{m\cdot v_1^2}{r_1}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r_1}} = \sqrt{\frac{6{,}672\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}0\cdot 10^{24}}{6500\cdot 10^3}} = 7{,}85\ m/s$$

Quando invece l'astronave percorre l'orbita ellittica per il calcolo delle velocità:

Dobbiamo ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica, per cui nei due vertici possiamo scrivere la seguente equazione:

$$E_2 = E_3$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2 - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_2} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_3^2 - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_3}$$

Dobbiamo ricorrere alla conservazione del momento angolare, per cui nei due vertici possiamo scrivere la seguente equazione:

$$m\cdot r_2\cdot v_2 = m\cdot r_3\cdot v_3$$

Ricavando v_3 da questa relazione e sostituendola nella precedente:

$$v_3 = \frac{r_2}{r_3}\cdot v_2$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_2}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_3^2-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_3}$$

$$v_2^2-2\cdot G\cdot\frac{M_T}{r_2}=v_3^2-2\cdot G\cdot\frac{M_T}{r_3}$$

$$v_2^2-\left(\frac{r_2}{r_3}\cdot v_2\right)^2=2\cdot G\cdot M_T\cdot\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)$$

$$\frac{r_3^2-r_2^2}{r_3^2}\cdot v_2^2=2\cdot G\cdot M_T\cdot\frac{r_3-r_2}{r_2\cdot r_3}$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M\cdot r_3}{r_2\cdot(r_2+r_3)}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}672\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}0\cdot 10^{24}\cdot 30\cdot 10^6}{6{,}5\cdot 10^6\cdot\left(6{,}5\cdot 10^6+30\cdot 10^6\right)}}=\mathbf{1{,}01\cdot 10^4\ \ m/s}$$

E quindi può essere ricavata anche v_3:

$$v_3=\frac{r_2}{r_3}\cdot v_2=\frac{r_2}{r_3}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M\cdot r_3}{r_2\cdot(r_2+r_3)}}=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M\cdot r_2}{r_3\cdot(r_2+r_3)}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}672\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}0\cdot 10^{24}\cdot 6{,}5\cdot 10^6}{30\cdot 10^6\cdot\left(6{,}5\cdot 10^6+30\cdot 10^6\right)}}=$$

$$=\mathbf{2{,}18\cdot 10^4\ \ m/s}$$