la gravitazione – esercizio n. 7

Determinare la velocità con cui va lanciato dalla superficie della terra un satellite che si vuole porre in orbita geostazionaria e la velocità del satellite quando sarà in orbita. Si consideri nulla la resistenza offerta dall'atmosfera e trascurabile ogni effetto dovuto alla rotazione della terra ed all'influenza degli altri corpi celesti.
(Si ricordi che un satellite in orbita geostazionaria risulta fermo rispetto alla terra.)
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$, $M_{TERRA} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg , $R_{TERRA} = 6{,}37 \cdot 10^3$ km.
R.: 10,76 km/s ; 3,07 km/s ;

Si ricordi che un satellite è in orbita geostazionaria quando si trova sempre nella stessa posizione sul piano equatoriale terrestre, ovvero descrive sul piano equatoriale, un orbita circolare, ruotando con lo stesso periodo e nello stesso verso in cui la terra ruota intorno al suo asse, cioè risulta fermo rispetto alla terra.)

Ricordiamo che per il principio di conservazione dell'energia meccanica la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo, in movimento nel campo gravitazionale terrestre, si mantiene costante durante il moto:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = \text{costante}$$

Il che si può tradurre nell'affermazione che l'energia totale al momento della partenza deve essere uguale a quella di arrivo, ovvero:

$$E_{iniziale} = E_{finale}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_i^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_f^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s}$$

Ricordando che, per il secondo principio della dinamica:

$$F = m_s \cdot a_c$$

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s^2} = m_s \cdot \frac{v_f^2}{R_s}$$

$$m_s \cdot v_f^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s}$$

L'equazione di equilibrio per le energie può essere scritta:

$$\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_i^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s} - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_i^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_i^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s}$$

$$v_i^2 = 2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot R_s} \right)$$

$$v_i = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot R_s} \right)}$$

Sempre utilizzando il secondo principio della dinamica possiamo ricavare la velocità v_f:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_s^2} = m_s \cdot \frac{v_f^2}{R_s}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_s}}$$

Se poi indichiamo con T il periodo di rivoluzione del satellite, la velocità potrà anche essere scritta come:

$$v_f = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_s}{T}$$

Uguagliando i due valori ottenuti:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R_s}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_s}}$$

$$\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_s^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{R_s}$$

$$\frac{R_s^3}{T^2} = \frac{G}{4 \cdot \pi^2} \cdot M_T$$

Tale relazione è in sostanza la terza legge di Keplero.

Ricavando R_s:

$$R_s = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot \pi^2} \cdot 86400^2} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Ora è possibile calcolare la velocità iniziale ed anche quella finale: