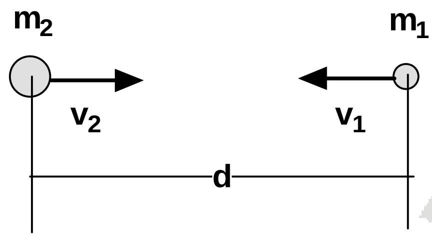
# la gravitazione – esercizio n. 4

**Due ipotetici pianeti di massa $m_1$ ed $m_2$ e raggi $r_1$ ed $r_2$ rispettivamente, sono fermi quando sono separati da una distanza infinita. A causa della loro attrazione gravitazionale, essi vanno l'uno verso l'altro su una retta di collisione.**
**Supposto $m_1 = 2{,}00\cdot10^{24}$ kg, $m_2 = 8{,}00\cdot10^{24}$ kg, $r_1 = 3{,}00\cdot10^{6}$ m ed $r_2 = 5{,}00\cdot10^{6}$ m.**
**Quando la distanza fra i loro centri è d, calcolare la velocità di ciascun pianeta e la loro velocità relativa.**
**Calcolare l'energia cinetica di ciascun pianeta appena prima della collisione.**

**R.:** $v_1 = m_2 \cdot \sqrt{\dfrac{2\cdot G}{d\cdot(m_1+m_2)}}$ ; $v_2 = m_1 \cdot \sqrt{\dfrac{2\cdot G}{d\cdot(m_1+m_2)}}$ **; 1,06·10^32 J ; 0,27·10^32 J ;**




Applichiamo la conservazione dell'energia:
A distanza infinità l'energia cinetica è nulla perché i pianeti sono fermi.
A distanza d è presente sia energia cinetica sia è stato compiuto un lavoro dalle forze gravitazionali:

$$0 = \frac{1}{2}\cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}\cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{G\cdot m_1 \cdot m_2}{d}$$

Applichiamo la conservazione della quantità di moto:

$$0 = -m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

Ricavando una velocità da questa relazione e sostituendola nella prima:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1}\cdot v_2$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot m_1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\cdot v_2\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{G\cdot m_1 \cdot m_2}{d}$$

$$m_1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\cdot v_2\right)^2 + m_2 \cdot v_2^2 = \frac{2\cdot G\cdot m_1 \cdot m_2}{d}$$

$$\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right)\cdot v_2^2 = \frac{2\cdot G\cdot m_1 \cdot m_2}{d}$$

$$\frac{m_2(m_2+m_1)}{m_1}\cdot v_2^2 = \frac{2\cdot G\cdot m_1 \cdot m_2}{d}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot m_1}{d}\frac{m_1}{m_1+m_2}} = m_1 \cdot \sqrt{\frac{2\cdot G}{d\cdot(m_1+m_2)}}$$

Analogo risultato avremmo trovato se avessimo calcolato $v_1$:

$$v_1 = m_2 \cdot \sqrt{\frac{2\cdot G}{d\cdot(m_1+m_2)}}$$

La velocità relativa è:

$$v_r = v_2 - (-v_1) = v_1 + v_2 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G}{d \cdot (m_1 + m_2)}} + m_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G}{d \cdot (m_1 + m_2)}} =$$

$$= (m_1 + m_2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G}{d \cdot (m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot (m_1 + m_2)}{d}}$$

Per ricavare l'energia cinetica un attimo prima della collisione occorre calcolare $v_1$ e $v_2$:

$$v_1 = m_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G}{(r_1 + r_2) \cdot (m_1 + m_2)}} =$$

$$= 8{,}00 \cdot 10^{24} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11}}{\left(3{,}00 \cdot 10^{6} + 5{,}00 \cdot 10^{6}\right) \cdot \left(2{,}00 \cdot 10^{24} + 8{,}00 \cdot 10^{24}\right)}} = 1{,}03 \cdot 10^{4}\ m/s$$

$$v_2 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G}{(r_1 + r_2) \cdot (m_1 + m_2)}} =$$

$$= 2{,}00 \cdot 10^{24} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}{\left(3{,}00 \cdot 10^{6} + 5{,}00 \cdot 10^{6}\right) \cdot \left(2{,}00 \cdot 10^{24} + 8{,}00 \cdot 10^{24}\right)}} = 0{,}26 \cdot 10^{4}\ m/s$$

Le energie cinetiche saranno quindi:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}00 \cdot 10^{24} \cdot \left(1{,}03 \cdot 10^{4}\right)^2 = \mathbf{1{,}06 \cdot 10^{32}\ \ J}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}00 \cdot 10^{24} \cdot \left(0{,}26 \cdot 10^{4}\right)^2 = \mathbf{0{,}27 \cdot 10^{32}\ J}$$