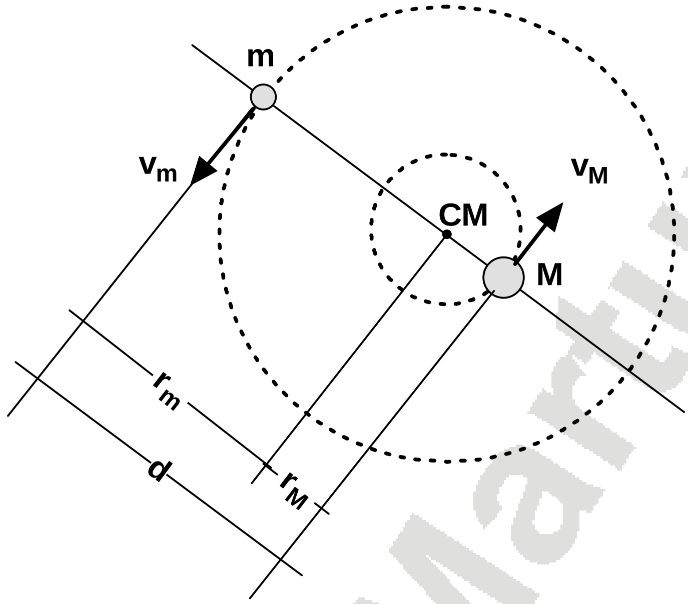
la gravitazione – esercizio n. 3

Due stelle di massa M ed m, poste a distanza d, ruotano in orbite circolari attorno al loro centro di massa. Mostrare che ogni stella ha un periodo dato da:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot (m + M)} \cdot d^3$$



Intanto le due stelle ruotano intorno al centro di massa e perciò:

$$M \cdot r_M = m \cdot r_m$$

dove si deve verificare che:

$$r_M + r_m = d$$

Ricordando che ∑F = m·a si ha rispettivamente per M ed m:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} = M \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = M \cdot \frac{1}{r_M}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T}\right)^2$$

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} = m \cdot \frac{v_m^2}{r_m} = m \cdot \frac{1}{r_m}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r_m}{T}\right)^2$$

Che semplificate danno le seguenti equazioni:

$$G \cdot m \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot r_M$$

$$G \cdot M \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot r_m$$

Sommando le due equazioni sopra scritte:

$$G \cdot (m + M) \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot (r_M + r_m)$$

$$G \cdot (m + M) \cdot T^2 =$$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot d^3}{G \cdot (m + M)}$$