la gravitazione – esercizio n. 1

La massa ed il raggio della terra e della luna sono $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg, $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}$ m, $M_L = 7{,}36\cdot10^{22}$ kg, $R_L = 1{,}75\cdot10^{6}$ m, rispettivamente. La loro distanza relativa è $d = 3{,}84\cdot10^{8}$ m.
Spiegare come mai è necessario più carburante ad una navicella per viaggiare dalla terra alla luna che non per il viaggio di ritorno. Stimare la differenza.
R.: 23 ;

Per il viaggio dalla terra alla luna un motore deve spingere la navicella fino ad un punto intermedio x tra la tra e la luna in cui il campo gravitazionale totale sia uguale a zero ovvero il campo gravitazionale della terra sia uguale a quello della luna.

$$\frac{F}{M_L} = \frac{G\cdot M_T}{x^2}$$

$$\frac{F}{M_T} = \frac{G\cdot M_L}{(d-x)^2}$$

Uguagliando i due campi:

$$\frac{G\cdot M_T}{x^2} = \frac{G\cdot M_L}{(d-x)^2}$$

$$M_T\cdot\left(d^2 - 2\cdot d\cdot x + x^2\right) = M_L\cdot x^2$$

$$\frac{M_T}{M_L}\cdot\left(d^2 - 2\cdot d\cdot x + x^2\right) - x^2 = 0 \qquad \text{chiamando} \qquad k = \frac{M_T}{M_L} = \frac{5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}36\cdot10^{22}} = 81{,}25$$

$$(k-1)\cdot x^2 - 2\cdot d\cdot k\cdot x + k\cdot d^2 = 0$$

$$x = \frac{d\cdot k \pm \sqrt{d^2\cdot k^2 - k\cdot d^2\cdot(k-1)}}{(k-1)} = \frac{d\cdot k \pm \sqrt{d^2\cdot k^2 - k^2\cdot d^2 + k\cdot d^2}}{(k-1)} = \frac{d\cdot k \pm \sqrt{k\cdot d^2}}{(k-1)} =$$

$$= \frac{d\cdot k \pm d\cdot\sqrt{k}}{(k-1)} = \begin{cases} \dfrac{d\cdot\left(k+\sqrt{k}\right)}{(k-1)} \\[2ex] \dfrac{d\cdot\left(k-\sqrt{k}\right)}{(k-1)} \end{cases}$$

Escludendo la soluzione x > d:

$$x = \frac{d\cdot\left(k-\sqrt{k}\right)}{(k-1)} = \frac{3{,}84\cdot10^8\cdot\left(81{,}25-\sqrt{81{,}25}\right)}{(81{,}25-1)} = 3{,}46\cdot10^8 \text{ m}$$

$$d - x = 3{,}84\cdot10^8 - 3{,}46\cdot10^8 = 0{,}38\cdot10^8 \text{ m}$$

Ora l'energia necessaria per portare una navicella dalla terra al punto x vale approssimativamente:

$$\Delta E_{T\to x} = m\cdot g\cdot\left(h_T - h_x\right) = m\cdot g\cdot\left(R_T - x\right)$$

$$\frac{\Delta E_{T\to x}}{m} = g\cdot\left(R_T - x\right) = \frac{G\cdot M_T}{{R_T}^2}\cdot R_T - \frac{G\cdot M_T}{x^2}\cdot x = G\cdot M_T\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Delta E_{L\to x} = m\cdot g\cdot\left(h_L - h_x\right) = m\cdot g\cdot\left(R_L - \left(d - x\right)\right)$$

$$\frac{\Delta E_{L\to x}}{m} = g\cdot\left(R_L - x\right) = \frac{G\cdot M_L}{{R_L}^2}\cdot R_L - \frac{G\cdot M_T}{\left(d-x\right)^2}\cdot\left(d - x\right) = G\cdot M_L\cdot\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{\left(d-x\right)}\right)$$

Facendo il rapporto fra le due energie:

$$\frac{\frac{\Delta E_{T\to x}}{m}}{\frac{\Delta E_{L\to x}}{m}} = \frac{\Delta E_{T\to x}}{\Delta E_{L\to x}} = \frac{G\cdot M_T\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{x}\right)}{G\cdot M_L\cdot\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{\left(d-x\right)}\right)} = \frac{M_T}{M_L}\cdot\frac{\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{\left(d-x\right)}\right)} =$$

$$= \frac{5,98\cdot 10^{24}}{7,36\cdot 10^{22}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{6,37\cdot 10^{6}} - \frac{1}{3,46\cdot 10^{8}}\right)}{\left(\frac{1}{1,75\cdot 10^{6}} - \frac{1}{0,38\cdot 10^{8}}\right)} = \mathbf{23}$$