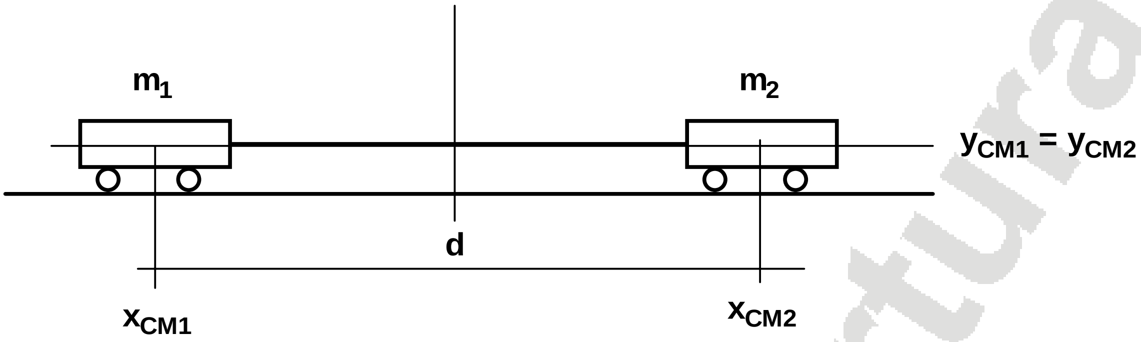
centro di massa – esercizio n. 9

Due vagoni ferroviari identici, i cui centri di massa si trovano ad una distanza d, sono situati su un binario orizzontale e vengono avvicinati l'uno all'altro mediante il cavo di un verricello posto su uno dei vagoni.

a) Si descriva il loro moto relativo.

b) Si ripeta il problema, nel caso in cui la massa di un vagone sia tre volte più grande dell'altro.



a) Descrizione del moto relativo

Le forze agenti sui due vagoni, dovute al cavo che li collega, sono forze interne al sistema costituito dai due vagoni. Essendo quindi nulla la risultante delle forze esterne, il centro di massa del sistema rimane immobile, benché i due vagoni si muovano l'uno verso l'altro. Prendendo l'origine del sistema di coordinate nel centro di massa, si ha:

Le coordinate del centro di massa si ricavano utilizzando la definizione:

$$x_{CM} = 0 = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

dove x_1 ed x_2 indicano la posizione dei centri di massa dei due vagoni.

Se $m_1 = m_2 = m$, l'equazione diventa:

$$0 = \frac{x_1 \cdot m + x_2 \cdot m}{m + m} \qquad 0 = \frac{m \cdot (x_1 + x_2)}{2 \cdot m} \qquad 0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x_1 = -x_2$$

I due vagoni si avvicinano al centro di massa, che inizialmente si trova a metà strada tra i due (cioè d/2 da ognuno), in modo tale da far sì che i loro centri risultino sempre equidistanti da esso.

b) Si ripeta il problema, nel caso in cui la massa di un vagone sia tre volte più grande dell'altro.

Se $m_1 = 3 \cdot m_2$, l'equazione diventa:

$$0 = \frac{x_1 \cdot 3 \cdot m_2 + x_2 \cdot m_2}{3 \cdot m_2 + m_2} \qquad 0 = \frac{m_2 \cdot (3 \cdot x_1 + x_2)}{4 \cdot m_2} \qquad 0 = \frac{3 \cdot x_1 + x_2}{4} \qquad x_1 = -\frac{x_2}{3}$$

I due vagoni si avvicinano, in modo tale che il centro di massa rimane immobile ed il vagone più pesante si trova sempre ad una distanza da esso pari ad un terzo della distanza del centro di massa del vagone più leggero.

Dato che inizialmente:

$$|x_1| + |x_2| = d \qquad \text{allora:} \qquad \frac{x_2}{3} + x_2 = d \qquad \text{da cui:} \qquad x_2 = \frac{3}{4}d \qquad x_1 = \frac{1}{4}d$$