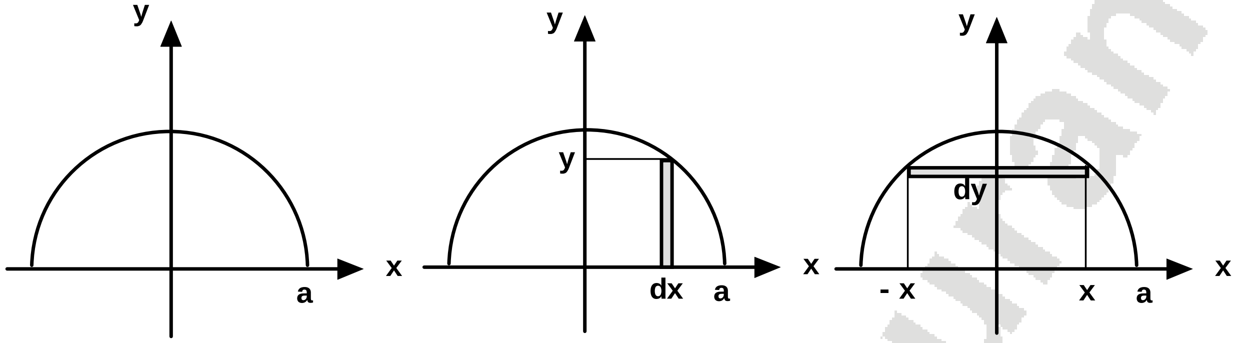
centro di massa – esercizio n. 7

Calcolare il centro di massa di un semidisco di raggio a e densità uniforme rispetto al sistema di riferimento di figura.
R.: 0 ; 4·a / 3·π ;



Indicando con ρ la densità del materiale , con Δs lo spessore del semidisco, con y l'altezza di un elemento elementare di base dx, si avrà che la massa elementare vale:

$$dm = \rho\cdot\Delta s\cdot y\cdot dx = \frac{M}{\frac{\pi\cdot a^2}{2}\cdot\Delta s}\cdot\Delta s\cdot y\cdot dx = \frac{2\cdot M}{\pi\cdot a^2}\cdot y\cdot dx$$

E pertanto l'ascissa del centro di massa varrà, ricordando che essendo un semidisco vale la relazione:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\cdot\int_{-a}^{a} x\cdot dm = \frac{1}{M}\cdot\int_{-a}^{a} x\cdot\frac{2\cdot M}{\pi\cdot a^2}\cdot y\cdot dx = \frac{2\cdot M}{\pi\cdot a^2\cdot M}\cdot\int_{-a}^{a} x\cdot y\cdot dx = \frac{2}{\pi\cdot a^2}\cdot\int_{-a}^{a} x\cdot\sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx =$$

$$= \frac{2}{\pi\cdot a^2}\cdot\left[-\frac{1}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_{-a}^{a} = 0$$

Indicando con ρ la densità del materiale, con Δs lo spessore della lamina, con x la larghezza di un elemento elementare di altezza dy, si avrà che la massa elementare vale:

$$dm = \rho\cdot\Delta s\cdot 2x\cdot dy = \frac{M}{\frac{\pi\cdot a^2}{2}\cdot\Delta s}\cdot\Delta s\cdot 2x\cdot dy = \frac{2\cdot M}{\pi\cdot a^2}\cdot 2x\cdot dy$$

Mentre l'ordinata del centro di massa varrà, ricordando che essendo un semidisco vale la relazione:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\cdot\int_{0}^{a} y\cdot dm = \frac{1}{M}\cdot\int_{0}^{a} y\cdot\frac{2\cdot M}{\pi\cdot a^2}\cdot 2x\cdot dy = \frac{2\cdot M}{\pi\cdot a^2\cdot M}\cdot\int_{0}^{a} y\cdot 2x\cdot dy = \frac{2}{\pi\cdot a^2}\cdot\int_{0}^{a} y\cdot 2\cdot\sqrt{a^2 - y^2}\cdot dy =$$

$$= \frac{4}{\pi\cdot a^2}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot\left(a^2 - y^2\right)^{3/2}\right]_{0}^{a} = \frac{4}{\pi\cdot a^2}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot a^3\right] = \frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}$$