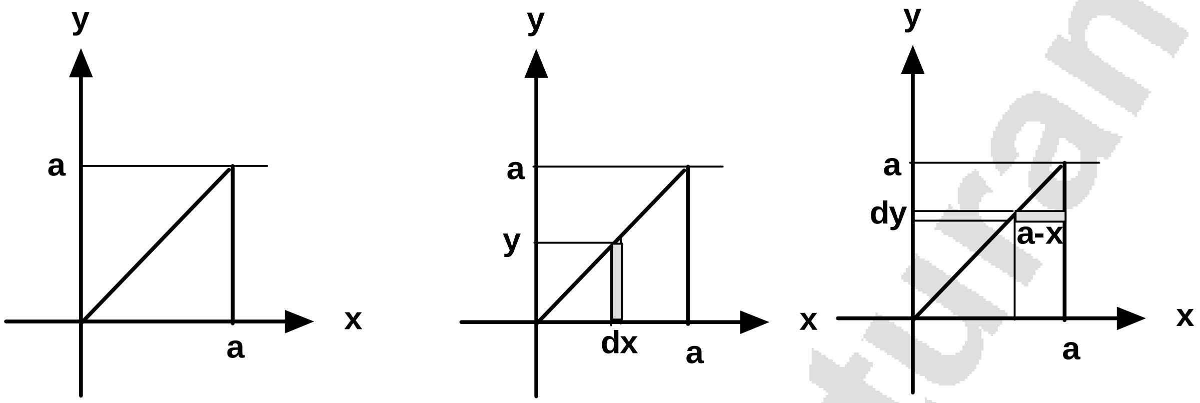
centro di massa – esercizio n. 6

Calcolare il centro di massa di una lamiera a forma di triangolo rettangolo equilatero a densità uniforme rispetto al sistema di riferimento di figura.
R.: 2·a / 3 ; a / 3 ;



Indicando con ρ la densità del materiale , con Δs lo spessore della lamina, con y l'altezza di un elemento elementare di base dx, si avrà che la massa elementare vale:

$$dm = \rho \cdot \Delta s \cdot y \cdot dx = \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \Delta s} \cdot \Delta s \cdot y \cdot dx = \frac{2 \cdot M}{a^2} \cdot y \cdot dx$$

E pertanto l'ascissa del centro di massa varrà, ricordando che essendo il triangolo isoscele y = x:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \int_0^a x \cdot dm = \frac{1}{M} \cdot \int_0^a x \cdot \frac{2 \cdot M}{a^2} \cdot y \cdot dx = \frac{2 \cdot M}{a^2 \cdot M} \cdot \int_0^a x \cdot y \cdot dx = \frac{2}{a^2} \cdot \int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{2}{a^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} \cdot a$$

Indicando con ρ la densità del materiale , con Δs lo spessore della lamina, con (a – x) la larghezza di un elemento elementare di altezza dy, si avrà che la massa elementare vale:

$$dm = \rho \cdot \Delta s \cdot (a - x) \cdot dy = \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \Delta s} \cdot \Delta s \cdot (a - x) \cdot dy = \frac{2 \cdot M}{a^2} \cdot (a - x) \cdot dy$$

Mentre l'ordinata del centro di massa varrà, ricordando che essendo il triangolo isoscele y = x:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \int_0^a y \cdot dm = \frac{1}{M} \cdot \int_0^a y \cdot \frac{2 \cdot M}{a^2} \cdot (a - x) \cdot dy = \frac{2 \cdot M}{a^2 \cdot M} \cdot \int_0^a y \cdot (a - x) \cdot dy = \frac{2}{a^2} \cdot \int_0^a (a \cdot y - y^2) \cdot dy =$$

$$= \frac{2}{a^2} \cdot \left[a \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{a^2} \cdot \left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{1}{3} \cdot a$$