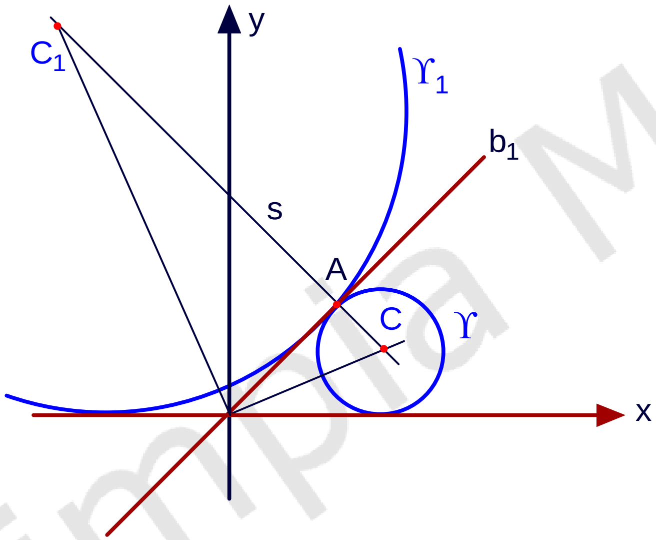
Circonferenza

Esercizio n. 15

Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse x, alla bisettrice del I e III quadrante e passanti per un punto assegnato A

$A(3\ ;\ 3)$



Soluzione

1. Traccio una retta $s \perp b_1$ passante per il punto A (questa retta conterrà entrambi i centri): $y-3=-1\cdot(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=-x+6$

2. Traccio le bisettrici degli angoli formati dalle due tangenti (asse x e b_1) ed anch'esse conterranno i centri perché questi sono equidistanti da entrambe le tangenti

3. Metto a sistema le bisettrici con la retta s:

$$\begin{cases} y=-x+6 \\ \dfrac{|y|}{\sqrt{1}}=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ \left(\sqrt{2}\cdot|y|\right)^2=\left(|x-y|\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ 2\cdot y^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ x^2-2\cdot x\cdot y-y^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ x^2-2\cdot x\cdot(-x+6)-(-x+6)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ x^2+2\cdot x^2-12\cdot x-x^2+12\cdot x-36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ x^2=18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_1=-3\cdot\sqrt{2}+6 \\ y_2=+3\cdot\sqrt{2}+6 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=+3\cdot\sqrt{2} \\ x_2=-3\cdot\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C\left(+3\cdot\sqrt{2}\ ;\ -3\cdot\sqrt{2}+6\right) \\ C_1\left(-3\cdot\sqrt{2}\ ;\ +3\cdot\sqrt{2}+6\right) \end{matrix}$$

4. Calcolo dei raggi:

$$r=\sqrt{\left(3\cdot\sqrt{2}-3\right)^2+\left(-3\cdot\sqrt{2}+6-3\right)^2}=\sqrt{18-18\cdot\sqrt{2}+9+18-18\sqrt{2}+9}=\sqrt{54-36\cdot\sqrt{2}}$$

ì

$$r_1=\sqrt{\left(-3\cdot\sqrt{2}-3\right)^2+\left(+3\cdot\sqrt{2}+6-3\right)^2}=\sqrt{18+18\cdot\sqrt{2}+9+18+18\sqrt{2}+9}=\sqrt{54+36\cdot\sqrt{2}}$$

5. Calcolo delle equazioni delle circonferenze richieste:

$$\Upsilon \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \quad \Rightarrow \quad \left(x-3\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(y+3\cdot\sqrt{2}-6\right)^2=\left(\sqrt{54-36\cdot\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2-6\cdot\sqrt{2}\cdot x+18+y^2+2\cdot\left(3\cdot\sqrt{2}-6\right)\cdot y+\cancel{18}+\cancel{36}-\cancel{36\cdot\sqrt{2}}-\cancel{54}+\cancel{36\cdot\sqrt{2}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-6\cdot\sqrt{2}\cdot x+2\cdot\left(3\cdot\sqrt{2}-6\right)\cdot y+18=0$$

$$\Upsilon_1 \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \quad \Rightarrow \quad \left(x+3\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(y-3\cdot\sqrt{2}-6\right)^2=\left(\sqrt{54+36\cdot\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+6\cdot\sqrt{2}\cdot x+18+y^2-2\cdot\left(3\cdot\sqrt{2}+6\right)\cdot y+\cancel{18}+\cancel{36}+\cancel{36\cdot\sqrt{2}}-\cancel{54}-\cancel{36\cdot\sqrt{2}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-6\cdot\sqrt{2}\cdot x-2\cdot\left(3\cdot\sqrt{2}+6\right)\cdot y+18=0$$