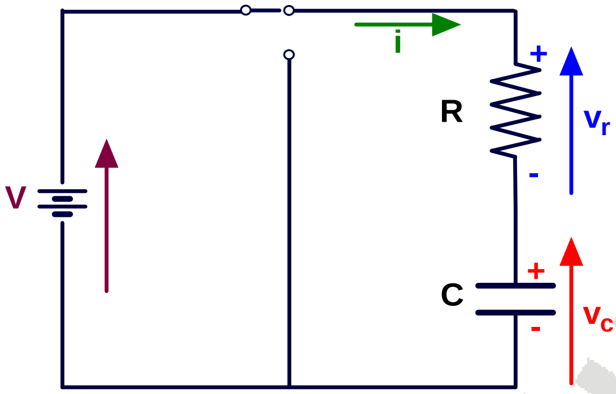
Analisi matematica del fenomeno transitorio RL

Transitorio di un circuito RL alimentato a tensione costante:



Quando viene applicata ad un circuito RL una tensione costante V si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = V$$

che riscritta dividendo per L diventa:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{V}{L}$$

Essa è una equazione differenziale lineare del primo ordine, del tipo:

$$\frac{dy}{dx} - a \cdot x = R$$

dove a è una costante ed R è una funzione di x, ma non di y.
La soluzione completa di tale equazione, composta dalla funzione complementare e dall'integrale particolare, è:

$$y = y_o + y_p = c \cdot e^{a \cdot x} + e^{a \cdot x} \cdot \int e^{-a \cdot x} \cdot R \cdot dx$$

dove c è una costante arbitraria, definita conoscendo le condizioni iniziali.
Utilizzando questa soluzione potremo scrivere per la corrente i:

$$i = c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \int e^{\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \frac{V}{L} \cdot dt = c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{V}{R}$$

Per determinare c, si pone t = 0 e si pone per i il suo valore iniziale i_0, cioè il valore che la corrente assume appena dopo la chiusura dell'interruttore.
Nell'induttanza le relazioni tra tensione e corrente sono espresse da:

$$v = L \cdot \frac{di}{dt} \qquad\qquad i = \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt$$

La seconda espressione assicura che, qualunque sia la legge di applicazione della tensione, la corrente nell'induttanza deve essere rappresentata da una funzione continua.
Quindi poiché la corrente era nulla per $t = 0_-$, deve permanere tale anche per $t = 0_+$;
per cui si ottiene:

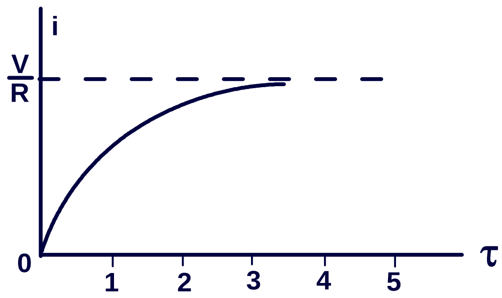
$$i_0 = 0 = c \cdot 1 + \frac{V}{R} \qquad \text{e quindi} \qquad c = -\frac{V}{R}$$

Avendo determinato il valore di c potremo scrivere:

$$i = -\frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

La funzione ora ricavata è notoriamente caratterizzata da una salita esponenziale, come appare in figura.

Analisi matematica del fenomeno transitorio RL



Il grafico mostra il periodo transitorio durante il quale la corrente si porta dal suo valore iniziale zero al valore finale V/R, situazione quest'ultima di regime.
La costante di tempo t della corrente i è espressa dal tempo trascorso il quale l'esponente di e è pari ad uno. Pertanto per un circuito RL la costante di tempo è τ = L/R secondi.
Per 1· τ la quantità fra parentesi nella corrente i vale:

$$1-e^{-1}=1-0{,}368=0{,}632$$

In questo istante la corrente ha un valore pari al 63,2% del suo valore finale.
Analogamente per 2· τ, la corrente è pari all'86,5% del valore finale. Dopo 5· τ il transitorio si considera generalmente esaurito. Per comodità, la costante di tempo è l'unità di misura utilizzata per tracciare il grafico della corrente.
L'andamento della tensione a cavallo degli elementi del circuito RL durante il transitorio è ricavato dall'andamento della corrente.
In virtù di questo fatto, la tensione ai capi del resistore risulta:

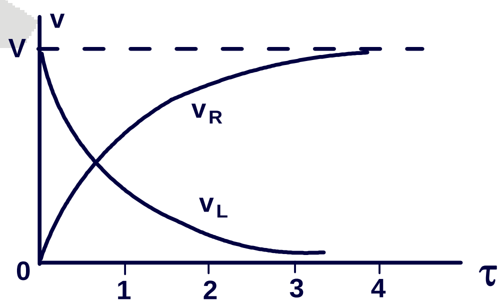
$$v_R = R\cdot i = R\cdot\frac{V}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = V\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

e la tensione ai capi dell'induttanza vale:

$$v_L = L\cdot\frac{di}{dt} = L\cdot\frac{d\left[\frac{V}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)\right]}{dt} = V\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

La tensione sul resistore durante il transitorio cresce con andamento esponenziale con la stessa costante di tempo della corrente, mentre la tensione sull'induttanza decresce con legge esponenziale, ma con la stessa costante di tempo. La somma di v_R e di v_L rispetta la legge di Kirchhoff istante per istante durante il transitorio.
Vedasi a questo proposito la figura sottostante.

$$v_R + v_L = V\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) + V\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = V$$



In un elemento circuitale qualunque il valore istantaneo della potenza è dato dal prodotto della tensione per la corrente.

Pertanto la potenza dissipata nel resistore risulta:

$$p_R = v_R \cdot i = V \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) \cdot \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = \frac{V^2}{R} \cdot \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + e^{-2\cdot\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

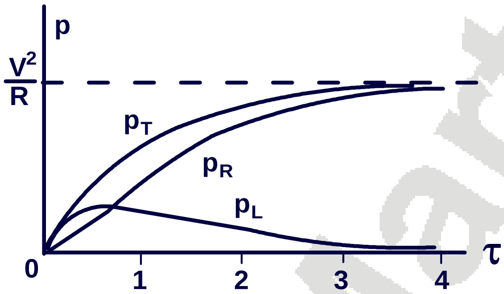
mentre la potenza nell'induttanza risulta:

$$p_L = v_L \cdot i = V \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \cdot \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = \frac{V^2}{R} \cdot \left(e^{-\frac{R}{L}\cdot t} - e^{-2\cdot\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

La potenza complessiva vale quindi:

$$p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

L'andamento delle tre potenze è rappresentato in figura:



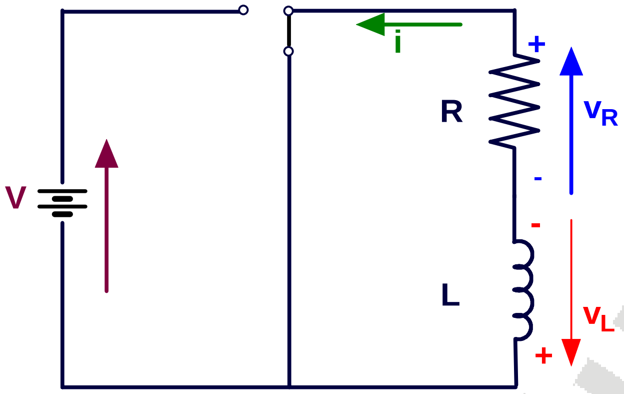
dove p_R e p_T hanno come valore di regime V^2/R e $I^2 \cdot R$, dove I è il valore di regime della corrente. La potenza nell'induttanza ha valore nullo all'inizio ed alla fine del transitorio, ed è la potenza che caratterizza l'energia accumulata nel campo magnetico della bobina.

Per dimostrare questo fatto, si integri p_L fra zero e l'infinito.

$$W = \int_0^\infty \frac{V^2}{R} \cdot \left(e^{-\frac{R}{L}\cdot t} - e^{-2\frac{R}{L}\cdot t}\right) \cdot dt = \frac{V^2}{R} \cdot \left[-\frac{L}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + \frac{L}{2 \cdot R} \cdot e^{-2\frac{R}{L}\cdot t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

Il circuito RL è percorso dunque a regime da una corrente di valore $i_o = V/R$.

Transitorio di un circuito RL in cui cessa l'alimentazione:



Nell'istante t = 0 l'interruttore è portato nella posizione 2, sconnettendo il generatore, e cortocircuitando nello stesso tempo il ramo contenente la serie RL.
Applicando la legge di Kirchhoff alle maglie a quest'ultimo circuito privo di generatori, si ottiene la seguente equazione:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$$

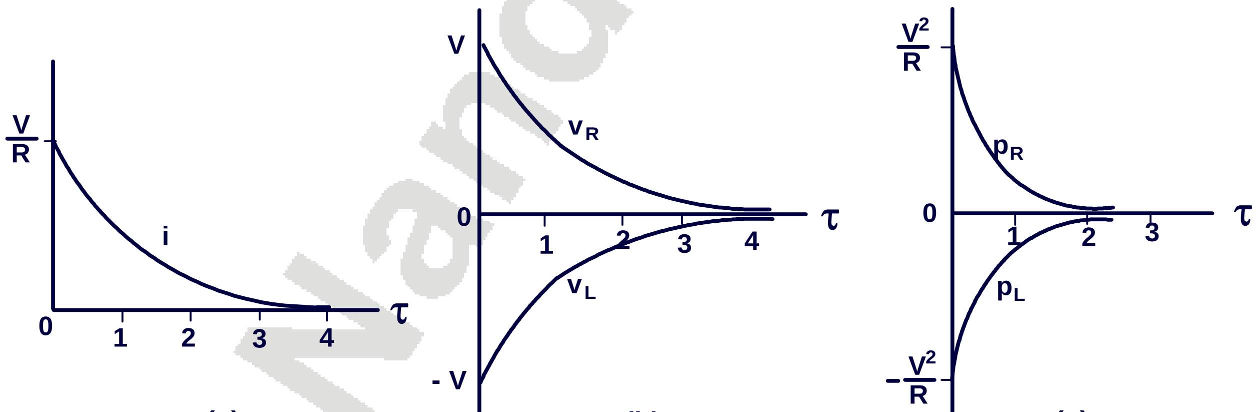
la cui soluzione è:

$$i = c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Per t = 0 la corrente iniziale è $i_0 = V/R$.
Sostituendo nella equazione sopra riportata risulterà: c = V/R e l'equazione che esprime l'andamento della corrente sarà data da:

$$i = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

La diminuzione esponenziale della corrente è riportata in figura (a).



(a) (b) (c)

Le tensioni corrispondenti a cavallo della resistenza e dell'induttanza sono:

$$v_R = R \cdot i = V \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad \text{e} \qquad v_L = L \cdot \frac{di}{dt} = -V \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

il cui andamento è riportato in figura (b).
La somma $v_R + v_L$ rispetta la legge di Kirchhoff in quanto la tensione applicata è zero quando l'interruttore è nella posizione considerata.
Le potenze, in valore istantaneo, valgono:

$$p_R = \frac{V^2}{R} \cdot e^{-2\frac{R}{L} \cdot t} \qquad \text{e} \qquad p_L = -\frac{V^2}{R} \cdot e^{-2\frac{R}{L} \cdot t}$$

e sono riportate in figura (c).
Se si integra p_L fra zero e l'infinito si trova che l'energia liberata è esattamente pari a quella accumulata dal campo magnetico durante il transitorio precedente, cioè $½ \cdot L \cdot I^2$
Durante il transitorio di chiusura del circuito in corto circuito questa energia viene trasferita al resistore.