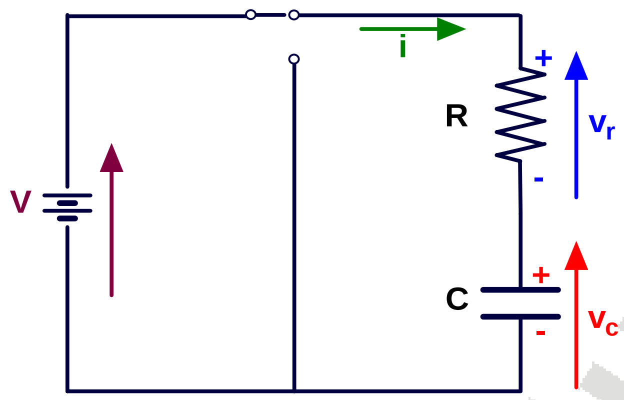
Analisi matematica del fenomeno transitorio RC

Transitorio di carica di un circuito RC a tensione costante:



Applicando la legge di Kirchhoff al circuito RC tipo serie rappresentato in figura, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{1}{C}\cdot\int i\cdot dt + R\cdot i = V$$

e differenziando,

$$\frac{i}{C} + R\cdot\frac{di}{dt} = 0$$

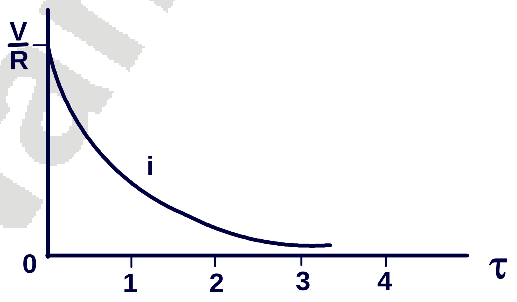
La soluzione di questa equazione omogenea è costituita dalla sola funzione complementare, poiché l'integrale particolare è zero. Quindi:

$$i = c\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

Per determinare la costante c, si osservi che dalla prima equazione scritta, per $t = 0$, risulta $R\cdot i_0 = V$ da cui $i_0 = V/R$. Sostituendo questo valore di i_o, si ricava $c = V/R$ per $t = 0$. Segue allora:

$$i = \frac{V}{R}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

L'equazione esprime una funzione con decremento esponenziale, come appare dalla figura.



Il grafico mostra il periodo transitorio durante il quale la corrente si porta dal suo valore iniziale V/R al valore finale zero, situazione quest'ultima di regime.
La costante di tempo τ della corrente i è espressa dal tempo trascorso il quale l'esponente di e è pari ad uno. Pertanto per un circuito RC la costante di tempo è $\tau = R\cdot C$ secondi.
Per $1\cdot\tau$ la quantità fra parentesi nella corrente i vale:

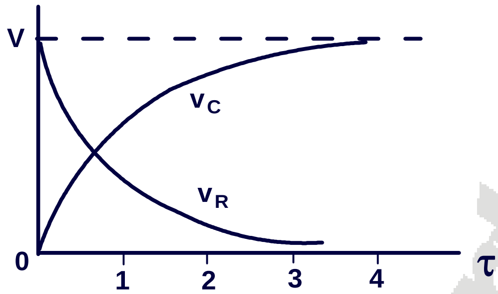
$$e^{-1} = 0{,}368$$

In questo istante la corrente ha un valore pari al 36,8% del suo valore iniziale.

Analogamente per $2 \cdot \tau$, la corrente è pari al 73,6% del valore finale. Dopo $5 \cdot \tau$ il transitorio si considera generalmente esaurito. Per comodità, la costante di tempo è l'unità di misura utilizzata per tracciare il grafico della corrente.
Le corrispondenti tensioni durante il transitorio risultano:

$$v_R = R \cdot i = V \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \qquad \text{e} \qquad v_c = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = V \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

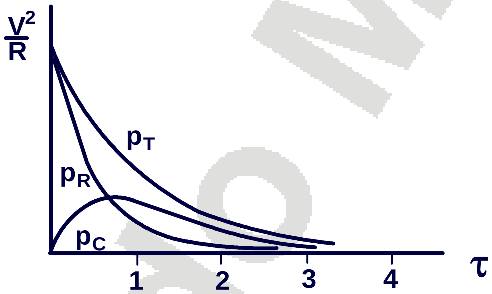
e sono rappresentate in figura:



Le potenze istantanee sono espresse da:

$$p_R = v_R \cdot i = \frac{V^2}{R} \cdot e^{-\frac{2 \cdot t}{R \cdot C}} \qquad \text{e} \qquad p_c = v_c \cdot i = \frac{V^2}{R} \cdot \left(e^{-\frac{t}{R \cdot C}} - e^{-\frac{2 \cdot t}{R \cdot C}}\right)$$

e sono rappresentate in figura:

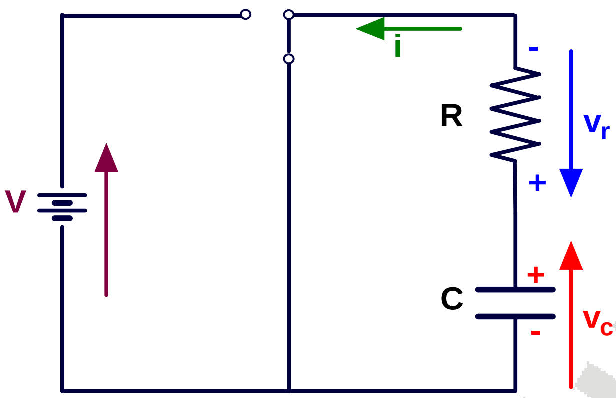


La potenza p_c, i cui valori iniziale e finale durante il transitorio sono eguali a zero, caratterizza l'energia accumulata dal campo elettrico del condensatore, alimentato con tensione V costante. Ciò è messo in evidenza dall'integrazione di p_c, fra zero e infinito.

$$W_C = \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R} \cdot \left(e^{-\frac{t}{R \cdot C}} - e^{-\frac{2 \cdot t}{R \cdot C}}\right) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

In un circuito serie RC, se trascorre un tempo sufficiente per raggiungere le condizioni di regime, la corrente è nulla.

Transitorio di scarica di un circuito RC:



In questo caso l'equazione del circuito è la seguente:

$$\frac{1}{C}\cdot\int i\cdot dt + R\cdot i = 0$$

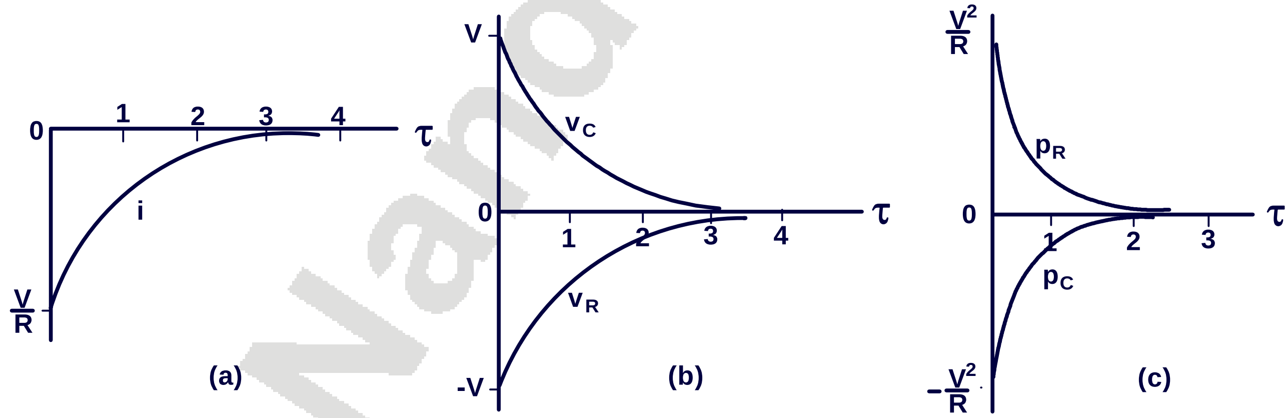
La soluzione è data dalla:

$$i = c\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

Per determinare la costante c si ponga nella relazione appena scritta t = 0 e si introduca il valore iniziale t_o della corrente. Poiché il condensatore è caricato ad una tensione V con le polarità rappresentate nello schema, la corrente iniziale di scarica è contraria al verso della corrente di carica i; da ciò segue $i_0 = -V/R$. Pertanto risulta $c = -V/R$ e la corrente vale:

$$i = -\frac{V}{R}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

Il transitorio di attenuazione è rappresentato in figura (a).



(a) (b) (c)

I corrispondenti transitori di tensione per gli elementi del circuito sono espressi da:

$$v_R = R\cdot i = -V\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}} \qquad \text{e} \qquad v_C = \frac{1}{C}\cdot\int i\cdot dt = V\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$$

e sono rappresentati in figura (b).

Si osservi che $v_R + v_C = 0$, in accordo con la legge di Kirchhoff, in quanto in questo caso non esiste alcuna tensione applicata dall'esterno. Le potenze durante il transitorio sono espresse dalle:

$$p_r = v_R\cdot i = \frac{V^2}{R}\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{R\cdot C}} \qquad \text{e} \qquad p_C = v_C\cdot i = -\frac{V^2}{R}\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{R\cdot C}}$$

e sono rappresentate in figura (c).

Analisi matematica del fenomeno transitorio RC

Non c'è alcuna sorgente che fornisca p_R, ma è evidente che durante il transitorio viene trasferita al resistore l'energia accumulata dal condensatore.
Si lascia allo studioso l'effettuazione dell'integrale di p_C fra zero ed infinito, avente come risultato $-\frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$.

Ė spesso utile conoscere l'equazione che esprime il transitorio della carica q in un circuito serie RC. Inoltre, poiché la corrente e la carica sono legate dalla relazione i = dq/dt, se è necessario conoscere la corrente, è sufficiente differenziare l'espressione ora scritta.
Come si evince dalla prima figura riportata, il condensatore si carica con le polarità delle armature segnate nello schema, poiché q ha lo stesso verso della corrente i.
L'equazione riferita alla corrente:

$$\frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt + R \cdot i = V$$

può essere riferita alla carica se si sostituisce dq/dt alla i.

$$\frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} = V \qquad \text{e poi} \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{R \cdot C} = \frac{V}{R}$$

Essa è un’equazione differenziale lineare del primo ordine, del tipo:

$$\frac{dy}{dx} - a \cdot x = R$$

dove a è una costante ed R è una funzione di x, ma non di y.
La soluzione completa di tale equazione, composta dalla funzione complementare e dall'integrale particolare, è:

$$y = y + y_p = c \cdot e^{a \cdot x} + e^{a \cdot x} \cdot \int e^{-a \cdot x} \cdot R \cdot dx$$

dove c è una costante arbitraria, definita conoscendo le condizioni iniziali.
Utilizzando questa soluzione potremo scrivere per la carica q:

$$q = c \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} + e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \int e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \frac{V}{R} \cdot dt = c \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} + C \cdot V$$

Per determinare c, si pone t = 0 e si pone per q il suo valore iniziale q_o, cioè il valore che la carica assume appena dopo la chiusura dell'interruttore.
Nella capacità le relazioni tra tensione e corrente sono espresse da:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad\qquad v = \frac{1}{C} \cdot \int dq$$

La seconda espressione assicura che, qualunque sia la legge di applicazione della tensione, la carica sul condensatore deve essere rappresentata da una funzione continua.
Quindi poiché la carica era nulla per t = 0_-, deve permanere tale anche per t = 0_+; per cui si ottiene:

$$q_0 = 0 = c \cdot 1 + C \cdot V \qquad \text{e quindi} \qquad c = -C \cdot V$$

Avendo determinato il valore di c potremo scrivere:

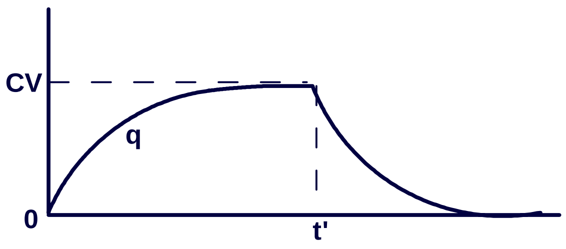
$$q = C \cdot V \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

Il transitorio di carica ha andamento esponenziale crescente verso il valore finale di CV.
Se, successivamente, si analizza un circuito di scarica, con riferimento alla carica q il risultato che si deduce è quello della diminuzione della carica dal valore CV secondo la legge espressa dalla:

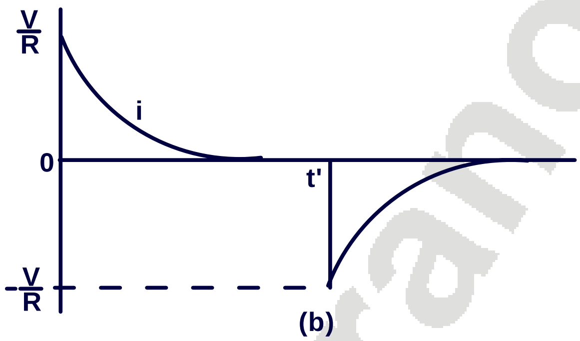
$$q = C \cdot V \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

L'andamento della carica q durante la carica e la scarica è rappresentato in figura (a), mentre in figura (b) sono rappresentati gli andamenti corrispondenti della corrente.

Analisi matematica del fenomeno transitorio RC



(a)



(b)

Dal momento che la carica deve avere andamento continuo, è q = CV per t'(–) e t'(+), mentre la i è eguale a zero per t'(–) e –V/R per t'(+).