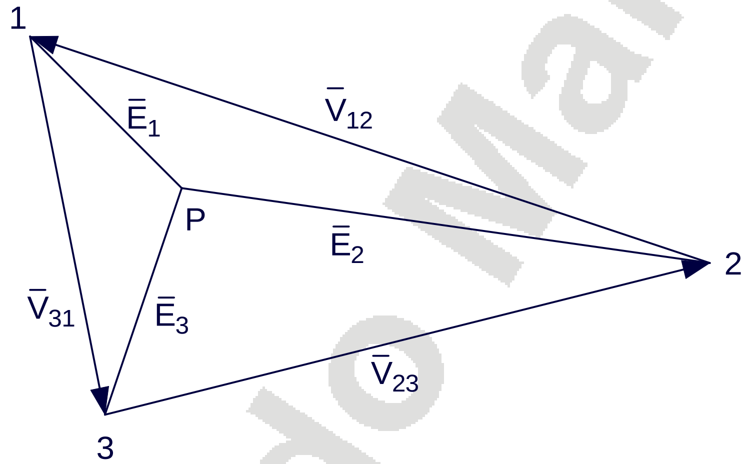
TEOREMI SULLE POTENZE

Ricordiamo che i sistemi trifasi a tre fili sono caratterizzati delle seguenti relazioni:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \qquad \text{per le correnti di linea}$$
$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0 \qquad \text{per le tensioni concatenate}$$

I rispettivi vettori delle correnti di linea e delle tensioni concatenate formano dunque dei triangoli chiusi.

Assegnata una terna di tensioni concatenate e preso un qualsiasi punto P come centro del sistema restano definite tre tensioni stellate *E* fra il punto P ed i vertici del triangolo 123 delle tensioni concatenate.
Queste tre tensioni hanno somma vettoriale nulla solo se il centro stella cade nel baricentro P del triangolo 123.



Per esse valgono invece sempre le relazioni:

$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$$
$$\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3$$
$$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$$

Ricordiamo che i tre teoremi delle potenze che seguono hanno una validità del tutto generale, purché si tratti di un sistema a tre fili comunque dissimmetrico e comunque squilibrato esso sia.

I° TEOREMA.

La differenza fra le indicazioni di un wattmetro inserito su di un filo qualunque (n), con l'entrata del circuito voltmetrico collegata al filo stesso e con l'uscita successivamente agli altri due (p e m) coincide con l'indicazione che si avrebbe derivando direttamente il circuito voltmetrico tra i fili (p) ed (m), ossia:

$$P_{nm} - P_{np} = P_{n(pm)}$$

Si ha cioè:

$$P_{13} - P_{12} = P_{1(23)}$$
$$P_{21} - P_{23} = P_{2(31)}$$
$$P_{32} - P_{31} = P_{3(12)}$$

Consideriamo allora il primo dei tre casi.
Possiamo scrivere:

$$P_{13} = \overline{V}_{13} \times \overline{I}_1 \qquad \text{e} \qquad P_{12} = \overline{V}_{12} \times \overline{I}_1$$
$$P_{13} - P_{12} = \overline{I}_1 \times (\overline{V}_{13} - \overline{V}_{12})$$

ma $\quad V_{13} = -V_{31} \quad$ e $\quad \overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31} = 0 \quad$ per cui:

$$P_{13} - P_{12} = \overline{I}_1 \times (\overline{V}_{13} - \overline{V}_{12}) = \overline{I}_1 \times (-\overline{V}_{31} - \overline{V}_{12}) = \overline{I}_1 \times \overline{V}_{23} = P_{1(23)}$$

Da questo teorema discende un importante corollario valido nel caso di sistemi trifasi simmetrici nelle tensioni.

COROLLARIO AL I° TEOREMA.

Nei sistemi trifasi comunque squilibrati, ma simmetrici, la differenza fra i due valori P_{nm} e P_{np} aventi il primo indice comune da il valore Q_n della potenza reattiva della fase corrispondente, moltiplicata per $\sqrt{3}$.

Si ha cioè:

$$P_{13} - P_{12} = P_{1(23)} = \sqrt{3} \cdot Q_1$$
$$P_{21} - P_{23} = P_{2(31)} = \sqrt{3} \cdot Q_2$$
$$P_{32} - P_{31} = P_{3(12)} = \sqrt{3} \cdot Q_3$$

In tal caso infatti la tensione $\overline{V}_{23}$ fra due fili 2,3 è in perfetta quadratura in ritardo con la tensione di fase $\overline{E}_1$ del terzo filo, essendo, come valore $V = \sqrt{3} \cdot E$ e pertanto:

$$P_{1(23)} = 3 \cdot E \cdot I \cdot \cos(90° - \varphi_1) = \sqrt{3} \cdot Q_1$$

II° TEOREMA (ARON)

La somma di due valori P_{np} e P_{mp} aventi in comune il secondo indice dà in ogni caso la potenza attiva totale del sistema P; ossia:

$$P_{np} + P_{mp} = P$$

Si ha cioè:

$$P_{13} + P_{23} = P$$
$$P_{12} + P_{32} = P$$
$$P_{31} + P_{21} = P$$

Dimostriamo la prima di tali eguaglianze:

$$\begin{aligned} P_{13} + P_{23} &= \overline{I}_1 \times \overline{V}_{13} + \overline{I}_2 \times \overline{V}_{23} = \overline{I}_1 \times (\overline{E}_1 - \overline{E}_3) + \overline{I}_2 \times (\overline{E}_2 - \overline{E}_3) = \\ &= \overline{I}_1 \times \overline{E}_1 + \overline{I}_2 \times \overline{E}_2 + \overline{E}_3 \times (-\overline{I}_1 - \overline{I}_2) = \\ &= \overline{I}_1 \times \overline{E}_1 + \overline{I}_2 \times \overline{E}_2 + I_3 \times \overline{E}_3 = P_1 + P_2 + P_3 = P \end{aligned}$$

Da questo teorema discende un importante corollario valido nel caso di sistemi trifasi simmetrici nelle tensioni ed equilibrate nelle correnti.

COROLLARIO AL II° TEOREMA.

Nei sistemi trifasi simmetrici ed equilibrati la differenza fra due valori P_{nm} e P_{mp} aventi in comune il secondo indice dà in ogni caso la potenza totale reattiva del sistema diviso per $\sqrt{3}$.

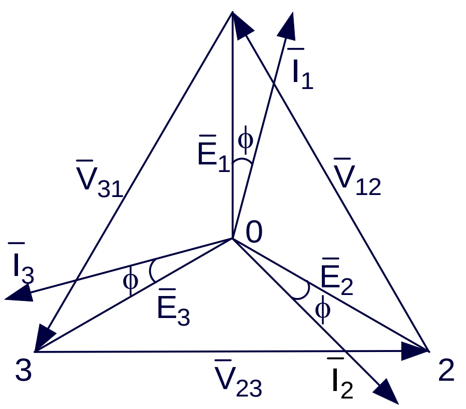
$$P_{nm} - P_{np} = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Si ha cioè:

$$P_{13} - P_{23} = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$P_{32} - P_{12} = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$P_{21} - P_{31} = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$



Dimostriamo la seconda di tali relazioni:

$$\begin{aligned} P_{32} - P_{12} &= I_3 \cdot V_{32} \cdot \cos\widehat{I_3 V_{32}} - I_1 \cdot V_{12} \cdot \cos\widehat{I_1 V_{12}} = \\ &= V \cdot I \cdot \cos(\varphi - 30°) - V \cdot I \cdot \cos(\varphi + 30°) = \\ &= V \cdot I \left[\cos\varphi \cdot \cos 30° + sen\varphi \cdot sen 30° - \cos\varphi \cdot \cos 30° + sen\varphi \cdot sen 30°\right] = \\ &= V \cdot I \cdot sen\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

III° T E0REMA

La somma di due valori P_{nm} e P_{np} aventi in comune il primo indice dà in ogni caso il triplo della potenza trasportata nel filo corrispondente a detto indice comune.

$$P_{nm} + P_{np} = 3 \cdot P_n$$

Si ha cioè:

$$P_{12} + P_{13} = 3 \cdot P_1$$
$$P_{21} + P_{23} = 3 \cdot P_2$$
$$P_{31} + P_{32} = 3 \cdot P_3$$

Dimostriamo la prima di tali eguaglianze:

$$\begin{aligned} P_{12} + P_{13} = 3 \cdot P_1 &= \bar{I}_1 \times \bar{V}_{12} + \bar{I}_1 \times \bar{V}_{13} = \\ &= \bar{I}_1 \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) + \bar{I}_1 \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_3) = \\ &= \bar{I}_1 \times \bar{E}_1 + \bar{I}_1 \times \bar{E}_1 + \bar{I}_1 \times (-\bar{E}_2 - \bar{E}_3) = \\ &= \bar{I}_1 \times \bar{E}_1 + \bar{I}_1 \times \bar{E}_1 + \bar{I}_1 \times \bar{E}_1 = 3 \cdot P_1 \end{aligned}$$

Ovviamente la relazione $\bar{E}_1 = -\bar{E}_2 - \bar{E}_3$ è valida solamente se le tensioni stellate sono riferite al centro teorico del sistema.

Sottolineiamo a questo punto che i tre teoremi delle potenze, enunciati facendo riferimento alle potenze reali di un sistema trifase, possono immediatamente estendersi ai corrispondenti valori delle potenze reattive.
La dimostrazione è immediata essendo sufficiente sostituire nei ragionamenti fatti, al prodotto scalare di due vettori $\bar{V} \times \bar{I} = V \cdot I \cdot \cos\alpha$ il cosiddetto prodotto vettoriale (o interno) $\bar{V} \wedge \bar{I} = V \cdot I \cdot sen\alpha$