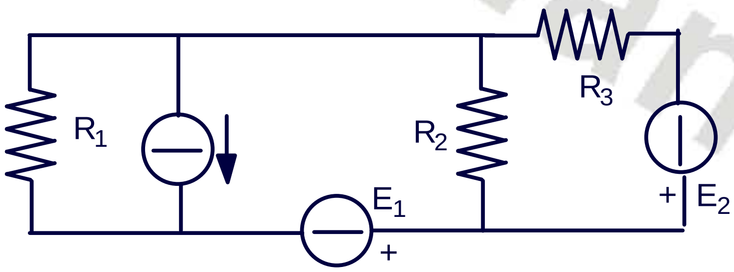
Principi di Kirchhoff – esercizio n. 11

Sia assegnato il circuito in figura.

- **Indicare il numero di nodi indipendenti e i rami del circuito analizzando la topologia del circuito per definire il numero di equazioni lineari ed il numero di incognite per risolvere il circuito.**
- **Indicare con chiarezza qual è il metodo di risoluzione scelto (Sistema di Kirchhoff, metodo di sostituzione, metodo delle maglie, metodo dei potenziali ai nodi, sovrapposizione effetti, ecc) e perché (cioè giustificare la scelta del metodo che si applica).**
- **Risolvere il circuito, trovare tensioni e correnti in ogni ramo.**
- **Calcolare la potenza assorbita e generata da ogni elemento presente nel circuito con relativo bilancio delle potenze (la potenza dei componenti attivi deve essere uguale alla potenza dei componenti passivi)**



$E_1 = 20\ V$	$E_1 = 20\ V$
$E_2 = 30\ V$	$E_2 = 30\ V$
$J = 10\ A$	$J = 10\ A$
$R_1 = 10\ \Omega$	$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 30\ \Omega$	$R_2 = 30\ \Omega$
$R_3 = 50\ \Omega$	$R_3 = 50\ \Omega$

Verranno utilizzati i principi di Kirchhoff.

Eventuale semplificazione del circuito

Per verificare se sia possibile semplificare il circuito occorre stabilirne i nodi e quindi controllare se vi siano resistenze in serie o in parallelo.

Si stabiliscano i nodi del circuito.

I nodi presenti nel circuito risultano essere 3.

Ricerca di resistenze in serie:

Non sono presenti resistenze in serie.

Ricerca di resistenze in parallelo:

Non sono presenti resistenze in parallelo.

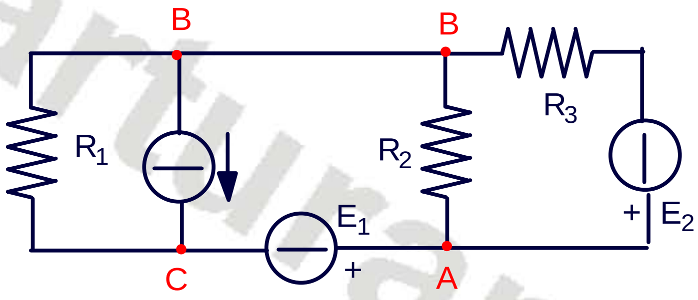


figura n. 1

1° Principio (ai nodi):
Per ogni nodo o superficie chiusa (nodo generalizzato) la somma algebrica delle correnti deve essere nulla.
Il primo principio va applicato ai nodi indipendenti che risultano essere (n – 1).
Essi vanno scelti in modo arbitrario.

2° Principio (alle maglie)
In ogni maglia la somma algebrica delle d.d.p. è nulla.
Il secondo principio va applicato alle maglie indipendenti che risultano essere
[r – (n – 1)].
Esse vanno individuate scegliendo le maglie adiacenti.

Si stabiliscano i nodi, i nodi indipendenti, i rami e le maglie indipendenti del circuito.

In tale circuito si individuano

n = 3 nodi
(n – 1) = (3 – 1) = 2 nodi indipendenti
r = 5 rami
[r – (n – 1)] = [5 – (3 – 1)] = 3 maglie indipendenti

(come maglie indipendenti verranno scelte quelle adiacenti).

Si disegnino, come in figura 2, in modo arbitrario, le correnti di ramo che pur essendo 5 perchè tanti sono i rami, risulteranno essere incognite solo in 4, in quanto su di un ramo è presente un generatore di corrente di valori noti J.

Tuttavia, in contemporanea, è sconosciuta la d.d.p V_{CB} ai capi del generatore di corrente, che costituisce dunque ulteriore incognita nelle equazioni alle maglie che saranno successivamente scritte.

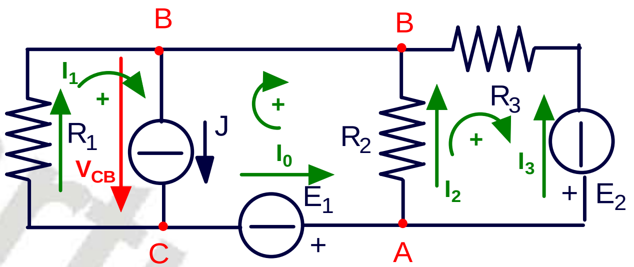


figura n. 2

Si ricorda che per applicare il secondo principio di Kirchhoff occorre fissare un verso arbitrario positivo di percorrenza della maglia.

I principi di Kirchhoff danno origine alle seguenti equazioni:

Equazioni ai nodi indipendenti:

nodo A: $I_0 = I_2 + I_3$

nodo C: $J = I_0 + I_1$

Equazioni alle maglie indipendenti

maglia ABA $R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = E_2$

maglia ABBCA $-R_2 \cdot I_2 = -E_1 - V_{CB}$

maglia CBC $R_1 \cdot I_1 = V_{CB}$

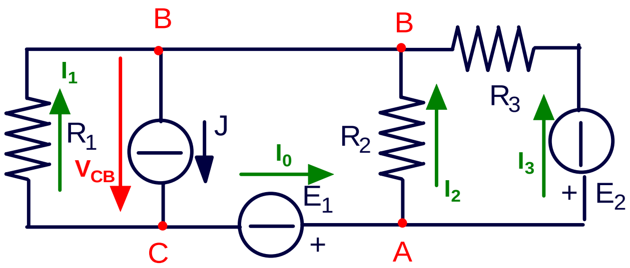


figura n. 3

Sostituendo i valori:

$$I_0 = I_2 + I_3$$
$$10 = I_0 + I_1$$
$$30 \cdot I_2 - 50 \cdot I_3 = 30$$
$$-30 \cdot I_2 = -20 - V_{CB}$$
$$10 \cdot I_1 = V_{CB}$$

Risolvendo il sistema si determinano le correnti e le d.d.p. incognite:

$$I_0 = \frac{87}{23}\text{ A} \quad ; \quad I_1 = \frac{143}{23}\text{ A}$$
$$I_2 = \frac{63}{23}\text{ A} \quad ; \quad I_3 = \frac{24}{23}\text{ A}$$
$$V_{CB} = \frac{1430}{23}\text{ V}$$

Calcolo della potenza erogata dai generatori:

Per calcolare la potenza fornita dai generatori di corrente occorre la d.d.p. V_{CB}.

$$V_{CB} = \frac{1430}{23}\text{ V}$$

Poiché, per il generatore di tensione E_2 il verso della corrente ed il verso della d.d.p. ai morsetti dei generatori sono discordi, allora tale generatore assorbe potenza invece che erogarla e pertanto la sua potenza deve essere considera negativa.

Calcolo delle potenze assorbite dalle resistenze;

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 10 \cdot \left(\frac{143}{23}\right)^2 = \frac{204490}{529}\text{ W}$$
$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 30 \cdot \left(\frac{63}{23}\right)^2 = \frac{119070}{529}\text{ W}$$
$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 50 \cdot \left(\frac{24}{23}\right)^2 = \frac{28800}{529}\text{ W}$$

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_0 = 20 \cdot \frac{87}{23} = \frac{1740}{23} \ \text{W}$$

$$P_{E_2} = -E_2 \cdot I_3 = -30 \cdot \frac{24}{23} = -\frac{720}{23} \ \text{W}$$

$$P_J = V_{CB} \cdot J = \frac{1430}{23} \cdot 10 = \frac{14300}{23} \ \text{W}$$

Verifica potenze erogate ed assorbite:

$$P_{E_T} = P_J + P_{E_1} + P_{E_2} = \frac{14300}{23} + \frac{1740}{23} - \frac{720}{23} = \frac{15320}{23} \ \text{W}$$

$$P_{R_T} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = \frac{204490}{529} + \frac{119070}{529} + \frac{28800}{529} = \frac{15320}{23} \ \text{W}$$

Soluzione sistema:

$$\begin{cases} I_0 = I_2 + I_3 \\ 10 = I_0 + I_1 \\ 30 \cdot I_2 - 50 \cdot I_3 = 30 \\ -30 \cdot I_2 = -20 - V_{CB} \\ 10 \cdot I_1 = V_{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_0 = I_2 + I_3 \\ 10 = I_2 + I_3 + I_1 \\ 3 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 = 3 \\ 30 \cdot I_2 = 20 + V_{CB} \\ 10 \cdot I_1 = V_{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = I_2 + I_3 + I_1 \\ 3 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 = 3 \\ 30 \cdot I_2 = 20 + V_{CB} \\ I_1 = \dfrac{V_{CB}}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = I_2 + I_3 + \dfrac{V_{CB}}{10} \\ I_2 = \dfrac{3 + 5 \cdot I_3}{3} \\ 30 \cdot I_2 = 20 + V_{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = \dfrac{3 + 5 \cdot I_3}{3} + I_3 + \dfrac{V_{CB}}{10} \\ 30 \cdot \dfrac{3 + 5 \cdot I_3}{3} = 20 + V_{CB} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{27 - 8 \cdot I_3}{3} = \dfrac{V_{CB}}{10} \\ 30 + 50 \cdot I_3 = 20 + V_{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 270 - 80 \cdot I_3 = 3 \cdot V_{CB} \\ I_3 = \dfrac{-10 + V_{CB}}{50} \end{cases} \Rightarrow \left\{ 270 - 80 \cdot \frac{-10 + V_{CB}}{50} = 3 \cdot V_{CB} \right. \Rightarrow \left\{ 1350 + 80 = 8 \cdot V_{CB} + 15 \cdot V_{CB} \right. \Rightarrow$$

$$23 \cdot V_{CB} = 1430 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} = \frac{1430}{23} \ \text{V}$$

$$I_3 = \frac{-10 + V_{CB}}{50} = \frac{-10 + \frac{1430}{23}}{50} = \frac{24}{23} \ \text{A} \ ; \quad I_2 = \frac{3 + 5 \cdot I_3}{3} = \frac{3 + 5 \cdot \frac{24}{23}}{3} = \frac{63}{23} \ \text{A} \ ; \quad I_1 = \frac{V_{CB}}{10} = \frac{\frac{1430}{23}}{10} = \frac{143}{23} \ \text{A} \ ; \quad I_0 = I_2 + I_3 = \frac{63}{23} + \frac{24}{23} = \frac{87}{23} \ \text{A}$$