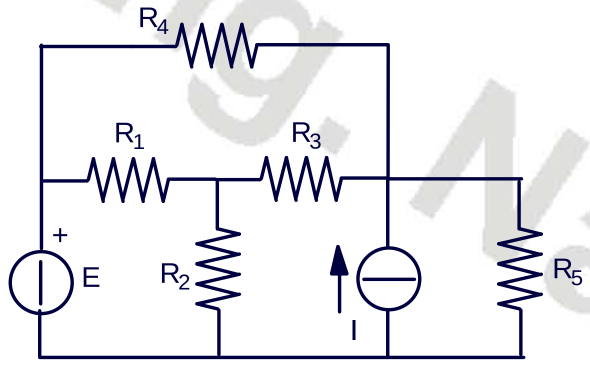
Trasformazione stella triangolo – esercizio n. 10

Calcolare la potenza assorbita da ogni resistore presente nel circuito, tensioni e correnti in ogni ramo.



$E = 30\ V$

$I = 2\ A$

$R_1 = 40\ \Omega$

$R_2 = 25\ \Omega$

$R_3 = 20\ \Omega$

$R_4 = 400\ \Omega$

$R_5 = 100\ \Omega$

Verrà utilizzata la trasformazione stella – triangolo.

Eventuale semplificazione del circuito

Per verificare se sia possibile semplificare il circuito occorre stabilirne i nodi e quindi controllare se vi siano resistenze in serie o in parallelo.

Si stabiliscano i nodi del circuito.
I nodi presenti nel circuito risultano essere 4.

Ricerca di resistenze in serie:
Non sono presenti resistenze in serie.

Ricerca di resistenze in parallelo:
Non sono presenti resistenze in parallelo.

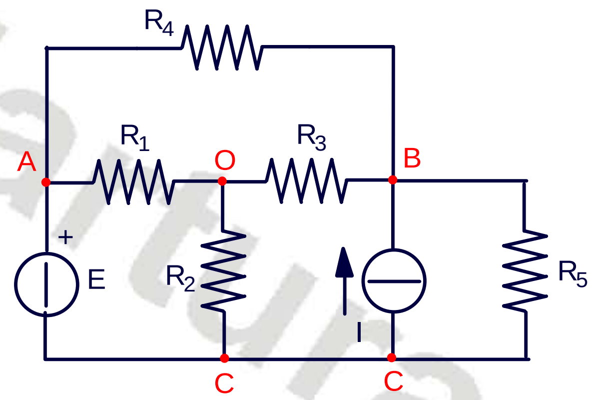


figura n. 1

Trasformazione stella triangolo – esercizio n. 10

Si individua la stella di resistenze R_1, R_2 ed R_3 con vertici in A, B, C e con centro stella in O e si trasforma in un triangolo di resistenze R_{AC}, R_{AB} ed R_{BC} con vertici in A, B e C.

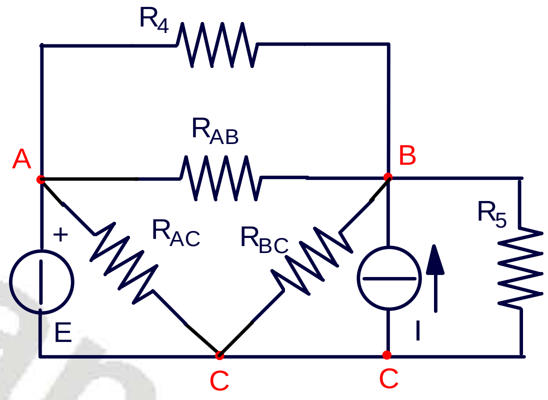


figura n. 2

Le relazioni necessarie per passare da resistenze connesse a stella a resistenze connesse a triangolo sono:

$$R_{AC} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = 40 + 25 + \frac{40 \cdot 25}{20} = 115\ \Omega$$

$$R_{AB} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = 40 + 20 + \frac{40 \cdot 20}{25} = 92\ \Omega$$

$$R_{BC} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = 25 + 20 + \frac{25 \cdot 20}{40} = 57{,}5\ \Omega$$

Le resistenze R_4 ed R_{AB} risultano essere in parallelo e pertanto:

$$R_{p1} = \frac{R_4 \cdot R_{AB}}{R_4 + R_{AB}} = \frac{400 \cdot 92}{400 + 92} = 74{,}8\ \Omega$$

Ancora le resistenze R_5 ed R_{BC} risultano essere in parallelo e pertanto:

$$R_{p2} = \frac{R_5 \cdot R_{BC}}{R_5 + R_{BC}} = \frac{100 \cdot 57{,}5}{100 + 57{,}5} = 36{,}5\ \Omega$$

La corrente I_{AC} nel ramo che contiene la resistenza R_{AC} è nota perché è nota la f.e.m. E ad essa applicata:

$$I_{AC} = \frac{E}{R_{AC}} = \frac{30}{115} = 0{,}26\ A$$

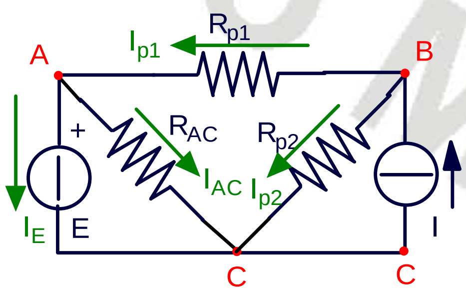


figura n. 3

Intanto, utilizzando il percorso ABC in cui si incontrano le resistenze R_{p1} ed R_{p2}, è possibile scrivere:

$$E = -R_{p1} \cdot I_{p1} + R_{p2} \cdot I_{p2}$$

Applicando poi l'equilibrio al nodo B si Ha:

$$I = I_{p1} + I_{p2}$$

Mettendo a sistema queste due equazioni è possibile calcolare le correnti I_{p1} ed I_{p2}

$$\begin{cases} E = -R_{p1} \cdot I_{p1} + R_{p2} \cdot I_{p2} \\ I = I_{p1} + I_{p2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{p1} = 0{,}39\ A \\ I_{p2} = 1{,}61\ A \end{cases}$$

Il sistema è risolto nelle note.

Trasformazione stella triangolo – esercizio n. 10

Si procede al calcolo di tutte le altre correnti e tensioni presenti nel circuito:

$I_E = I_{p1} - I_{AC} = 0,39 - 0,26 = 0,13\ A$

$V_{AC} = E = 30\ V$

$V_{BA} = R_{p1} \cdot I_{p1} = 74,8 \cdot 0,39 = 29,2\ V$

$V_{BC} = R_{p2} \cdot I_{p2} = 36,5 \cdot 1,61 = 58,8\ V$

Semplificando:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_5) \cdot J_1 + R_3 \cdot J_2 + R_5 \cdot 6 = E_1 \\ R_3 \cdot J_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot J_2 - R_4 \cdot 6 = E_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} (10 + 20 + 5) \cdot J_1 + 20 \cdot J_2 + 5 \cdot 6 = 300 \\ 20 \cdot J_1 + (8 + 20 + 10) \cdot J_2 - 10 \cdot 6 = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35 \cdot J_1 + 20 \cdot J_2 = 270 \\ 20 \cdot J_1 + 38 \cdot J_2 = 260 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si determinano le correnti fittizie di maglia J_1 e J_2:

$$\begin{cases} J_1 = 5,44\ A \\ J_2 = 3,98\ A \end{cases}$$

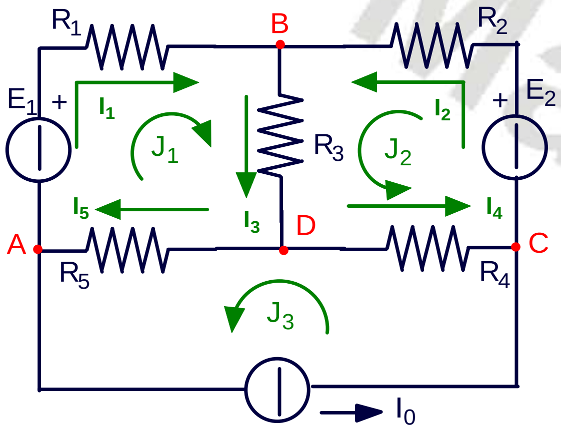


figura n. 4

e successivamente le correnti effettive di ramo I_1, I_2 , I_3 , I_4 ed I_5:

$I_1 = J_1 = 5,44$

$I_2 = J_2 = 3,98$

$I_3 = J_1 + J_2 = 5,44 + 3,98 = 9,42$

$I_4 = J_2 - J_3 = J_2 - 6 = 3,98 - 6 = -2.02$

$I_5 = J_1 + J_3 = J_1 + 6 = 5,44 + 6 = 11,44$

Trasformazione stella triangolo – esercizio n. 10

Poiché il valore della corrente I_4 risulta essere negativo, allora il verso arbitrariamente assegnato ad I_4 nella figura n. 4, deve essere invertito.

In conclusione le correnti nel circuito risultano essere quelle riportate in figura n. 5:

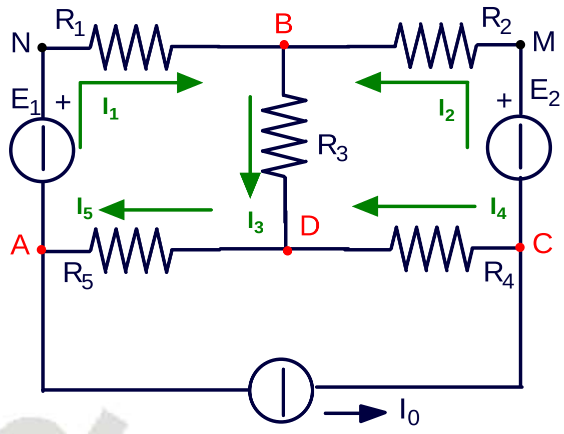


figura n. 5

$I_1 = 5,44 \text{ A}$

$I_2 = 3,98 \text{ A}$

$I_3 = 9,42 \text{ A}$

$I_4 = 2.02 \text{ A}$

$I_5 = 11,44 \text{ A}$

Calcolo della potenza erogata dai generatori:

Per calcolare la potenza fornita dal generatore di corrente occorre la d.d.p. V_{CA} .

$$V_{CA} = R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = 10 \cdot 2,02 + 5 \cdot 11,44 = 77,4 \text{ V}$$

Le altre d.d.p. presenti nel circuito risultano essere:

$$V_{BA} = E_1 - R_1 \cdot I_1 = 300 - 10 \cdot 5,44 = 245,6 \text{ V}$$

$$V_{BC} = E_2 - R_2 \cdot I_2 = 200 - 8 \cdot 3,98 = 168,2 \text{ V}$$

$$V_{BD} = R_3 \cdot I_3 = 20 \cdot 9,42 = 188,4 \text{ V}$$

$$V_{CD} = R_4 \cdot I_4 = 10 \cdot 2,02 = 20,2 \text{ V}$$

$$V_{DA} = R_5 \cdot I_5 = 5 \cdot 11,44 = 57,2 \text{ V}$$

$$V_{NB} = R_1 \cdot I_1 = 10 \cdot 5,44 = 54,4 \text{ V} \qquad V_{MB} = R_2 \cdot I_2 = 8 \cdot 3,98 = 31,84 \text{ V}$$

Calcolo delle potenze assorbite dalle resistenze;

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 10 \cdot 5,44^2 = 295,94 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 8 \cdot 3,98^2 = 126,72 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 20 \cdot 9,42^2 = 1774,73 \text{ W}$$

$$P_{R_4} = R_4 \cdot I_4^2 = 10 \cdot 2,02^2 = 40,80 \text{ W}$$

$$P_{R_5} = R_5 \cdot I_5^2 = 5 \cdot 11,44^2 = 654,37 \text{ W}$$

Verifica potenze erogate ed assorbite:

$$P_{E_T} = P_{E_1} + P_{E_2} + P_{I_0} = 1632 + 796 + 464,4 = 2892,4 \text{ W}$$

$$P_{R_T} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} = 295,94 + 126,72 + 1774,73 + 40,80 + 654,37 = 2892,37 \text{ W}$$

Note: Soluzione sistema

$$\begin{cases} E = -R_{p1} \cdot I_{p1} + R_{p2} \cdot I_{p2} \\ I = I_{p1} + I_{p2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = -R_{p1} \cdot I_{p1} + R_{p2} \cdot \left(I - I_{p1}\right) \\ I_{p2} = I - I_{p1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = -R_{p1} \cdot I_{p1} + R_{p2} \cdot I - R_{p2} \cdot I_{p1} \\ I_{p2} = I - I_{p1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(R_{p1} + R_{p2}\right) \cdot I_{p1} = R_{p2} \cdot I - E \\ I_{p2} = I - I_{p1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{p1} = \dfrac{R_{p2} \cdot I - E}{R_{p1} + R_{p2}} = \dfrac{36,5 \cdot 2 - 30}{74,8 + 36,5} = 0,39 \\ I_{p2} = I - I_{p1} = 2 - 0,39 = 1,61 \end{cases}$$