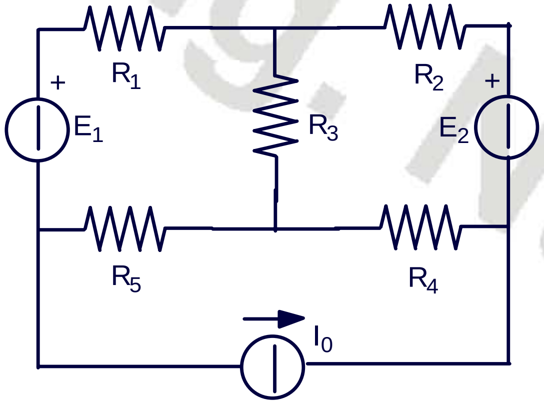
Principi di Kirchhoff – esercizio n. 9

Calcolare la potenza assorbita da ogni resistore presente nel circuito, tensioni e correnti in ogni ramo.
Indicare con chiarezza qual è il metodo di risoluzione scelto (Sistema di Kirchoff, metodo sostituzioni, maglie, nodi, sovrapposizione effetti, metodo delle correnti di maglia, ecc…)



$E_1 = 300\ V$
$E_2 = 200\ V$
$I_0 = 6\ A$
$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 8\ \Omega$
$R_3 = 20\ \Omega$
$R_4 = 10\ \Omega$
$R_5 = 5\ \Omega$

$E_1 = 300\ V$
$E_2 = 200\ V$
$I_0 = 6\ A$
$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 8\ \Omega$
$R_3 = 20\ \Omega$
$R_4 = 10\ \Omega$
$R_5 = 5\ \Omega$

Verranno utilizzati i principi di Kirchhoff.

Eventuale semplificazione del circuito
Per verificare se sia possibile semplificare il circuito occorre stabilirne i nodi e quindi controllare se vi siano resistenze in serie o in parallelo.

Si stabiliscano i nodi del circuito.
I nodi presenti nel circuito risultano essere 4.

Ricerca di resistenze in serie:
Non sono presenti resistenze in serie.

Ricerca di resistenze in parallelo:
Non sono presenti resistenze in parallelo.

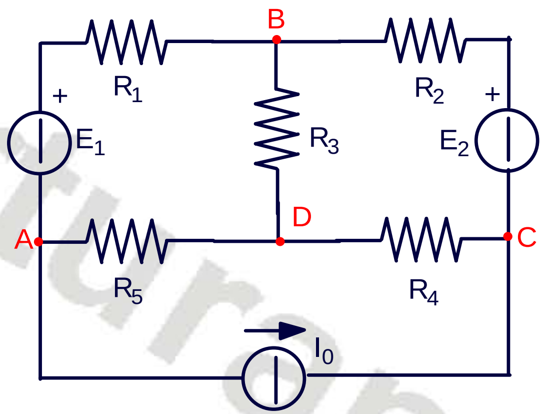


figura n. 1

Principi di Kirchhoff – esercizio n. 9

1° Principio (ai nodi):
Per ogni nodo o superficie chiusa (nodo generalizzato) la somma algebrica delle correnti deve essere nulla.
Il primo principio va applicato ai nodi indipendenti che risultano essere (n – 1).
Essi vanno scelti in modo arbitrario.
2° Principio (alle maglie)
In ogni maglia la somma algebrica delle d.d.p. è nulla.
Il secondo principio va applicato alle maglie indipendenti che risultano essere
[r – (n – 1)].
Esse vanno individuate scegliendo le maglie adiacenti.

Si stabiliscano i nodi, i nodi indipendenti, i rami e le maglie indipendenti del circuito.

In tale circuito si individuano

n = 4 nodi
(n – 1) = (4 – 1) = 3 nodi indipendenti
r = 6 rami
[r – (n – 1)] = [6 – (4 – 1)] = 3 maglie indipendenti

(come maglie indipendenti verranno scelte quelle adiacenti).

Si disegnino, come in figura 2, in modo arbitrario, le correnti di ramo che pur essendo 6 perchè tanti sono i rami, risulteranno essere incognite solo in 5, in quanto su di un ramo è presente un generatore di corrente di valore noto J_0 .

Tuttavia, in contemporanea, è sconosciuta la d.d.p V_{AC} ai capi del generatore di corrente, che costituisce dunque una ulteriore incognita nelle equazioni alle maglie che saranno successivamente scritte.

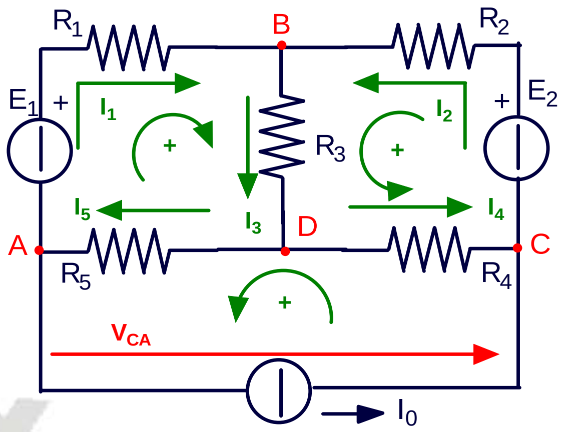


figura n. 2

Si ricorda che per applicare il secondo principio di Kirchhoff occorre fissare un verso arbitrario positivo di percorrenza della maglia.

I principi di Kirchhoff danno origine alle seguenti equazioni:

Equazioni ai nodi indipendenti:

nodo A: $I_5 = I_1 + I_0$

nodo B: $I_1 + I_2 = I_3$

nodo C: $I_0 + I_4 = I_2$

Equazioni alle maglie indipendenti

maglia ABDA $R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 = E_1$

maglia BCDB $R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 = E_2$

maglia ABCA $R_5 \cdot I_5 - R_4 \cdot I_4 = V_{CA}$

Sostituendo i valori:

$$I_5 = I_1 + 6$$
$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$6 + I_4 = I_2$$
$$10 \cdot I_1 + 20 \cdot I_3 + 5 \cdot I_5 = 300$$
$$8 \cdot I_2 + 20 \cdot I_3 + 10 \cdot I_4 = 200$$
$$5 \cdot I_5 - 10 \cdot I_4 = V_{CA}$$

Risolvendo il sistema si determinano le correnti e le d.d.p. incognite:

$$I_5 = 11,44$$
$$I_3 = 9,42$$
$$I_2 = 3,98$$
$$I_4 = -2,02$$
$$I_1 = 5,44$$
$$V_{AC} = 77,4$$

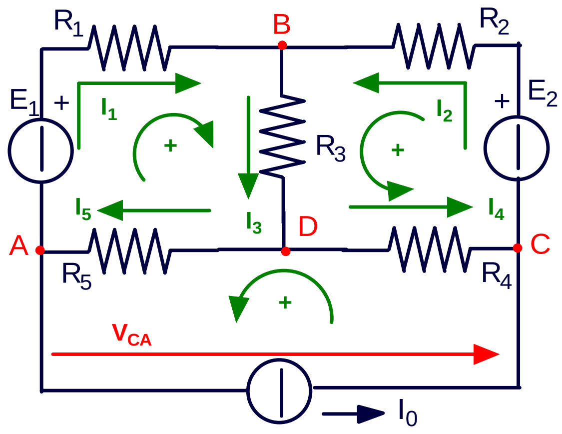


figura n. 3

Poiché il valore della corrente I_4 risulta essere negativo, allora il verso arbitrariamente assegnato ad I_4 nella figura n. 4, deve essere invertito.

In conclusione le correnti nel circuito risultano essere quelle riportate in figura n. 5:

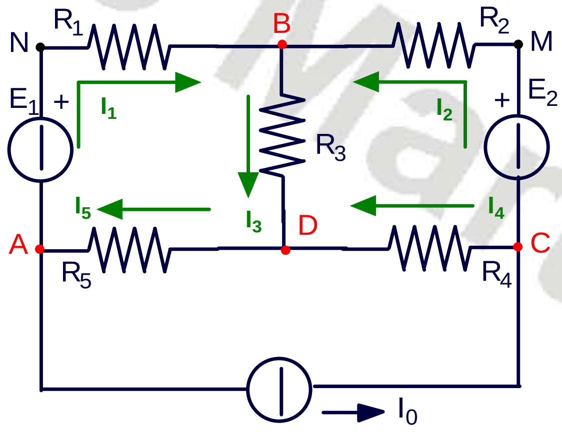


figura n. 5

$$I_1 = 5,44\ A$$
$$I_2 = 3,98\ A$$
$$I_3 = 9,42\ A$$
$$I_4 = 2.02\ A$$
$$I_5 = 11,44\ A$$
$$V_{AC} = 77,4$$

La risoluzione del sistema è riportato nelle note

Calcolo della potenza erogata dai generatori:

Per calcolare la potenza fornita dai generatori di corrente occorrono le d.d.p. V_{AC} e V_{BD}.

$$V_{CA} = -V_{AC} = -3{,}5\ V \qquad V_{DB} = -V_{BD} = -5{,}75\ V$$

Poiché, per i generatori di corrente I_{01} ed I_{02} il verso della corrente erogata ed il verso della d.d.p. ai morsetti dei generatori sono discordi, allora tali generatori assorbono potenza invece che erogarla e pertanto la loro potenza deve essere considera negativa.

$$P_{E_0} = E_0 \cdot I_0 = 10 \cdot 8{,}25 = 82{,}50\ W$$

$$P_{I_{01}} = V_{CA} \cdot I_{01} = -3{,}5 \cdot 4{,}00 = -14{,}00\ W$$

$$P_{I_{02}} = V_{DB} \cdot I_{02} = -5{,}75 \cdot 5{,}00 = -28{,}75\ W$$

Calcolo delle potenze assorbite dalle resistenze;

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 1 \cdot 4{,}25^2 = 18{,}06\ W$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 1 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}56\ W$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 2 \cdot 3{,}25^2 = 21{,}12\ W$$

Verifica potenze erogate ed assorbite:

$$P_{E_T} = P_{E_0} + P_{I_{01}} + P_{I_{02}} = 82{,}50 - 14{,}00 - 28{,}75 = 39{,}75\ W$$

$$P_{R_T} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = 18{,}06 + 0{,}56 + 21{,}12 = 39{,}74\ W$$

Note: Risoluzione del sistema

$$\begin{cases} I_5 = I_1 + 6 \\ I_1 + I_2 = I_3 \\ 6 + I_4 = I_2 \\ 10 \cdot I_1 + 20 \cdot I_3 + 5 \cdot I_5 = 300 \\ 8 \cdot I_2 + 20 \cdot I_3 + 10 \cdot I_4 = 200 \\ 5 \cdot I_5 - 10 \cdot I_4 = V_{CA} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5 = I_1 + 6 \\ \begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 6 + I_4 = I_2 \\ 2 \cdot I_1 + 4 \cdot I_3 + (I_1 + 6) = 60 \\ 4 \cdot I_2 + 10 \cdot I_3 + 5 \cdot I_4 = 100 \\ 5 \cdot (I_1 + 6) - 10 \cdot I_4 = V_{CA} \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5 = I_1 + 6 \\ I_3 = I_1 + I_2 \\ \begin{cases} 6 + I_4 = I_2 \\ 3 \cdot I_1 + 4 \cdot (I_1 + I_2) = 54 \\ 4 \cdot I_2 + 10 \cdot (I_1 + I_2) + 5 \cdot I_4 = 100 \\ 5 \cdot I_1 - 10 \cdot I_4 + 30 = V_{CA} \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5 = I_1 + 6 \\ I_3 = I_1 + I_2 \\ I_2 = 6 + I_4 \\ \begin{cases} 7 \cdot I_1 + 4 \cdot (6 + I_4) = 54 \\ 14 \cdot (6 + I_4) + 10 \cdot I_1 + 5 \cdot I_4 = 100 \\ 5 \cdot I_1 - 10 \cdot I_4 + 30 = V_{CA} \end{cases} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} I_5 = I_1 + 6 \\ I_3 = I_1 + I_2 \\ I_2 = 6 + I_4 \\ \begin{cases} 7 \cdot I_1 + 4 \cdot I_4 = 30 \\ 19 \cdot I_4 + 10 \cdot I_1 = 16 \\ 5 \cdot I_1 - 10 \cdot I_4 + 30 = V_{CA} \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5 = I_1 + 6 \\ I_3 = I_1 + I_2 \\ I_2 = 6 + I_4 \\ I_4 = 7{,}5 - 1{,}75 \cdot I_1 \\ \begin{cases} 19 \cdot (7{,}5 - 1{,}75 \cdot I_1) + 10 \cdot I_1 = 16 \\ 5 \cdot I_1 - 10 \cdot (7{,}5 - 1{,}75 \cdot I_1) + 30 = V_{CA} \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5 = I_1 + 6 \\ I_3 = I_1 + I_2 \\ I_2 = 6 + I_4 \\ I_4 = 7{,}5 - 1{,}75 \cdot I_1 \\ \begin{cases} -23{,}25 \cdot I_1 = -126{,}5 \\ 22{,}5 \cdot I_1 - 45 = V_{AC} \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5 = 5{,}44 + 6 = 11{,}44 \\ I_3 = 5{,}44 + 3{,}98 = 9{,}42 \\ I_2 = 6 - 2{,}02 = 3{,}98 \\ I_4 = 7{,}5 - 1{,}75 \cdot 5{,}44 = -2{,}02 \\ I_1 = 5{,}44 \\ V_{AC} = 22{,}5 \cdot 5{,}44 - 45 = 77{,}4 \end{array}$$