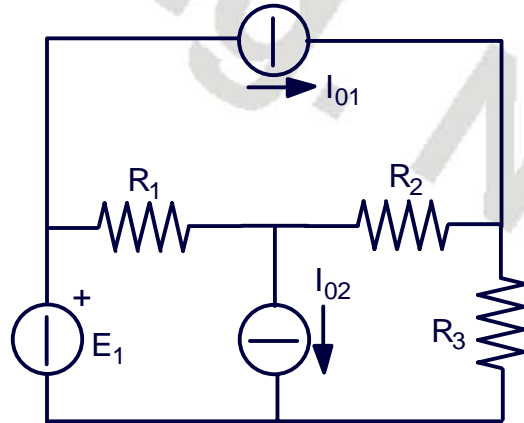


Metodo delle correnti di maglia fittizie o di Maxwell – esercizio n. 6

Calcolare le correnti che circolano nel circuito sotto riportato utilizzando il metodo delle correnti di maglia (Maxwell), la potenza erogata (o eventualmente assorbita) dai generatori di tensione E_1 e di corrente I_{01} ed I_{02} e quella assorbita da ciascuna resistenza:



$$E_0 = 10 \text{ V}$$

$$I_{01} = 4 \text{ A}$$

$$I_{02} = 5 \text{ A}$$

$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 1 \Omega$$

$$R_3 = 2 \Omega$$

Verrà utilizzato il metodo delle correnti fittizie di maglia o metodo di Maxwell.

Eventuale semplificazione del circuito

Per verificare se sia possibile semplificare il circuito occorre stabilirne i nodi e quindi controllare se vi siano resistenze in serie o in parallelo.

Si stabiliscano i nodi del circuito.

I nodi presenti nel circuito risultano essere 4.

Ricerca di resistenze in serie:

Non sono presenti resistenze in serie.

Ricerca di resistenze in parallelo:

Non sono presenti resistenze in parallelo.

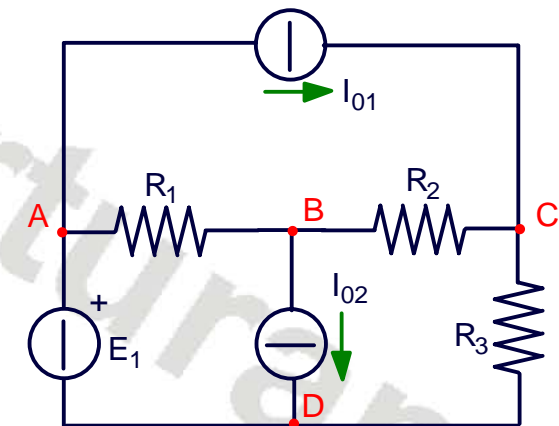


figura n. 1

Metodo delle correnti di maglia fittizie o di Maxwell – esercizio n. 6

Si stabiliscano i nodi, i rami e le maglie indipendenti del circuito.

In tale circuito si individuano:

$n = 4$ nodi

$r = 6$ rami

$[r - (n - 1)] = [6 - (4 - 1)] = 3$ maglie indipendenti.

In condizioni normali avremmo disegnato in modo arbitrario, le correnti di ramo che dovrebbero essere 6 perchè tanti sono i rami (anche se le due correnti I_{01} ed I_{02} risultano già essere note), e le correnti fittizie di maglia che dovrebbero essere 3, perchè tante sono le maglie indipendenti.

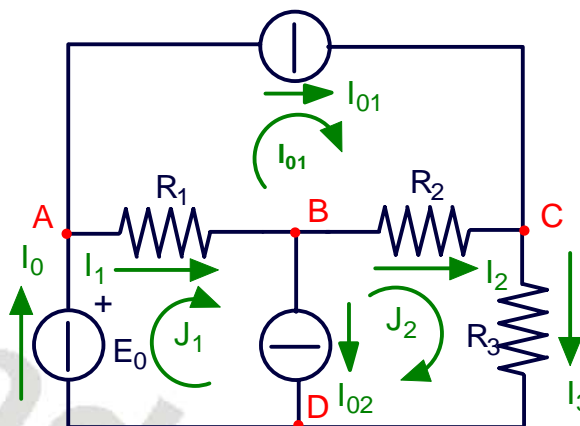


figura n. 2

Le relazioni esistenti tra le correnti di ramo e quelle fittizie di maglia, fissate come in figura, saranno:

$$I_0 = J_1$$

$$I_{01} = J_3 = 4 \text{ A}$$

$$I_{02} = J_1 - J_2 = 5 \text{ A}$$

$$I_1 = J_1 - J_3 = J_1 - 4$$

$$I_2 = J_2 - J_3 = J_2 - 4$$

$$I_3 = J_2$$

Si sottolinea però che mentre il generatore di corrente I_{01} appartiene ad una sola maglia e pertanto la corrente di maglia J_3 coinciderà con la corrente erogata dal generatore $J_3 = I_{01}$, semplificando così la risoluzione dell'esercizio perchè ovviamente scriveremo solo due equazioni alle maglie invece di tre, il secondo generatore di corrente I_{02} appartiene contemporaneamente a due diverse maglie e pertanto, in questi casi è opportuno, ai fini della risoluzione corretta dell'esercizio, sostituire con una d.d.p. V_{BD} il generatore di corrente e tuttavia per compensare tale nuova incognita si sfrutterà successivamente una ulteriore equazione ad uno dei due nodi al quale è collegato il generatore.

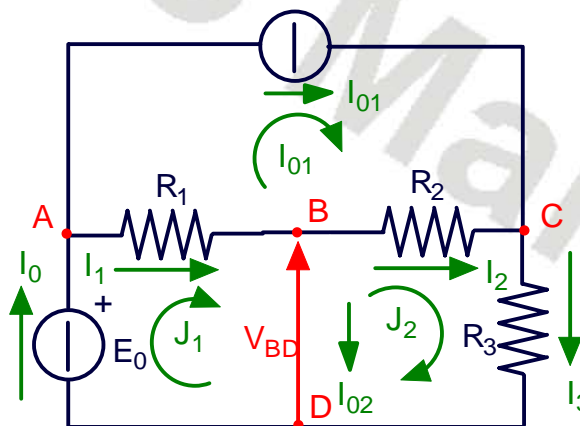


figura n. 3

Si applichi allora il secondo principio di Kirchhoff alle due maglie così individuate, utilizzando le correnti fittizie J_1 , J_2 e successivamente si utilizzerà il primo principio di Kirchhoff al nodo B scelto ad arbitrio tra i due B e D.

(Il verso di ciascuna delle correnti fittizie di maglia sia considerato anche come verso positivo di percorrenza della maglia quando si applica il secondo principio di Kirchhoff)

$$\begin{cases} R_1 \cdot (J_1 - I_{01}) + V_{BD} = E_0 \\ R_2 \cdot (J_2 - I_{01}) + R_3 \cdot J_2 - V_{BD} = 0 \end{cases}$$

Metodo delle correnti di maglia fittizie o di Maxwell – esercizio n. 6

Semplificando:

$$\begin{cases} R_1 \cdot J_1 = E_0 + R_1 \cdot I_{10} - V_{BD} \\ (R_2 + R_3) \cdot J_2 = V_{BD} + R_2 \cdot I_{10} \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 1 \cdot J_1 = 10 + 1 \cdot 4 - V_{BD} \\ (1 + 2) \cdot J_2 = V_{BD} + 1 \cdot 4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si determinano le correnti fittizie di maglia J_1 e J_2 in funzione di V_{BD} :

$$\begin{cases} J_1 = 14 - V_{BD} \\ J_2 = \frac{V_{BD} + 4}{3} \end{cases}$$

Si applichi ora il primo principio di Kirchhoff al nodo B scelto ad arbitrio tra i due B e D nel circuito di figura n. 4.

$$I_1 = I_2 + I_{02}$$

dove:

$$I_1 = J_1 - 4 = 14 - V_{BD} - 4 = 10 - V_{BD}$$

$$I_2 = J_2 - 4 = \frac{V_{BD} + 4}{3} - 4 = \frac{V_{BD} - 8}{3}$$

$$I_{02} = 4$$

$$10 - V_{BD} = \frac{V_{BD} - 8}{3} + 5$$

E quindi si calcola V_{BD} :

$$30 - 3 \cdot V_{BD} = V_{BD} - 8 + 15$$

$$4 \cdot V_{BD} = 23$$

$$V_{BD} = \frac{23}{4} = 5,75 \text{ V}$$

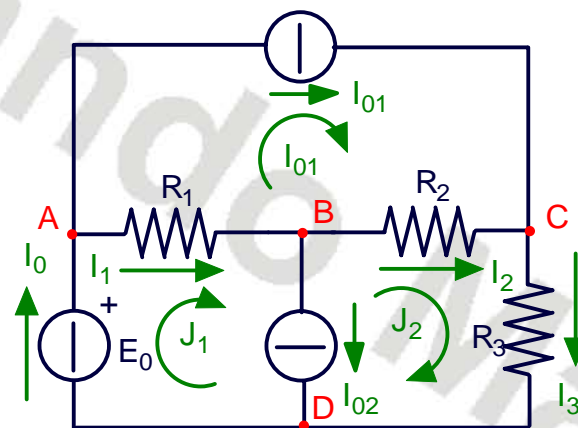


figura n. 4

e successivamente le correnti effettive di ramo I_0, I_1, I_2 ed I_3 :

$$I_0 = J_1 = 14 - V_{BD} = 14 - 5,75 = 8,25 \text{ A}$$

$$I_{01} = J_3 = 4 \text{ A}$$

$$I_{02} = J_1 - J_2 = 5 \text{ A}$$

$$I_1 = J_1 - J_3 = 14 - V_{BD} - 4 = 4,25 \text{ A}$$

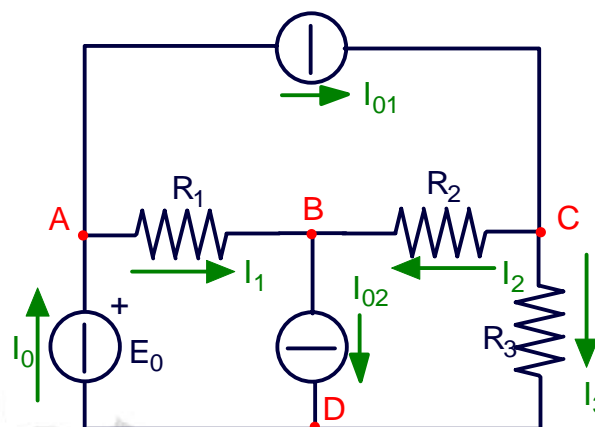
$$I_2 = J_2 - J_3 = \frac{V_{BD} + 4}{3} - 4 = -0,75 \text{ A}$$

$$I_3 = J_2 = \frac{V_{BD} + 4}{3} = 3,25 \text{ A}$$

Metodo delle correnti di maglia fittizie o di Maxwell – esercizio n. 6

Poiché il valore della corrente I_2 risulta essere negativo, allora il verso arbitrariamente assegnato ad I_2 nella figura n. 4, deve essere invertito.

In conclusione le correnti nel circuito risultano essere quelle riportate in figura n. 3:



$$\begin{aligned} I_{01} &= 4 \text{ A} \\ I_{02} &= 5 \text{ A} \\ I_0 &= 8,25 \text{ A} \\ I_1 &= 4,25 \text{ A} \\ I_2 &= 0,75 \text{ A} \\ I_3 &= 3,25 \text{ A} \end{aligned}$$

figura n. 5

Calcolo della potenza erogata dai generatori:

Per calcolare la potenza fornita dai generatori di corrente occorrono le d.d.p. V_{CA} e V_{DB} .

$$V_{CA} = -R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = -1 \cdot 4,25 + 1 \cdot 0,75 = -3,5 \text{ V}$$

$$V_{DB} = -5,75 \text{ V}$$

Poiché, per i generatori di corrente I_{01} ed I_{02} il verso della corrente erogata ed il verso della d.d.p. ai morsetti dei generatori sono discordi, allora tali generatori assorbono potenza invece che erogarla e pertanto la loro potenza deve essere considerata negativa.

$$P_{E_0} = E_0 \cdot I_0 = 10 \cdot 8,25 = 82,50 \text{ W}$$

$$P_{I_{01}} = V_{CA} \cdot I_{01} = -3,5 \cdot 4,00 = -14,00 \text{ W}$$

$$P_{I_{02}} = V_{DB} \cdot I_{02} = -5,75 \cdot 5,00 = -28,75 \text{ W}$$

Calcolo delle potenze assorbite dalle resistenze;

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 1 \cdot 4,25^2 = 18,06 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 1 \cdot 0,75^2 = 0,56 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 2 \cdot 3,25^2 = 21,12 \text{ W}$$

Verifica potenze erogate ed assorbite:

$$P_{E_T} = P_{E_0} + P_{I_{01}} + P_{I_{02}} = 82,50 - 14,00 - 28,75 = 39,75 \text{ W}$$

$$P_{R_T} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = 18,06 + 0,56 + 21,12 = 39,74 \text{ W}$$