SUCCESSIONI DI FUNZIONI

1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{(n-1)x} + n^2x^2}{e^{nx}}, \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme.

Detta f la sua funzione limite, si verifichi, inoltre, se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{1+n^2x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

3. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{n} - 1 & \text{se } x \in [-n, n]; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

4. Si studino la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \log(nx - n + 1) - \log(nx) \qquad (x \in [1, +\infty[, n \geq 1).$$

5. Si studino la convergenza puntuale ed uniforme della successione

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{n+1}, \qquad (x \in \mathbf{R})$$

e della successione $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$.

6. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x) & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

7. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}\sqrt{x^2 + \frac{2}{n}} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$