*Materiale di discussione n. 25*

# UNA DIMOSTRAZIONE SEMPLIFICATA DELL'ESISTENZA DI SOLUZIONI PER UN MODELLO DI EQUILIBRIO ECONOMICO GENERALE

di Michele TUCCI
Università di Roma "La Sapienza"

*La seguente nota è il risultato di un "esperimento didattico" condotto dall'autore nell'ambito del corso di Economia Politica II tenuto nell'a.a. 1993-94 dal prof. Claudio De Vincenti, a cui vanno i ringraziamenti per i commenti alla prima stesura del presente elaborato.*
*Del contenuto di quanto segue, tuttavia, l'autore assume la piena responsabilità.*

*Roma 1994*

**Definizioni preliminari** (1)

Definiamo il simplesso dei prezzi:

$$P = \left\{ p \in R^n \,/\, p_i \geq 0 \text{ per } i=1,n; \sum_{i=1,n} p_i = 1 \right\}$$

e l'insieme degli eccessi di domanda:

$$Z = \left\{ z \in R^n \,/\, -h \leq z_i \leq h \text{ per } i=1,n \right\}$$

ove $h$ è uno scalare positivo esogenamente dato. Si noti che gli insiemi $P$ e $Z$ sono non vuoti, chiusi, limitati e convessi. (2)

Definiamo la seguente corrispondenza: per ogni $z \in Z$ consideriamo i $p \in P$ tali da massimizzare il prodotto scalare $p \cdot z$. Ovvero, per ogni $z \in Z$, sia:

$$\mu(z) = \left\{ p \in P \,/\, p \cdot z \geq \hat{p} \cdot z, \text{ per ogni } \hat{p} \in P \right\}$$

Si noti che la corrispondenza appena definita è semicontinua superiormente; inoltre, per ogni $z \in Z$, $\mu(z)$ è non vuoto e convesso. (3)

## La dimostrazione

*Teorema (I).* Sia $z = E(p)$ una funzione di eccesso di domanda tale che: (4)

(a). $E(\cdot)$ sia definita in $P$ e assuma valori in $Z$.

(b). $E(\cdot)$ sia continua.

(c). $E(\cdot)$ soddisfi la legge di Walras, ovvero: $p \cdot E(p) = 0$.

Esisterà $p^0 \in P$ tale che: $z^0 = E(p^0) \leq 0$ (5)

*Dimostrazione.* Consideriamo l'insieme $P \times Z$. (6) Per ogni $(p, z) \in P \times Z$, definiamo la seguente corrispondenza: $\varphi(p, z) = \mu(z) \times E(p)$

Si osservi che: (7)

(I). L'insieme $P \times Z$ è non vuoto, chiuso, limitato e convesso poiché tali sono $P$ e $Z$.

(II). La corrispondenza $\varphi(\cdot)$ è semicontinua superiormente poiché $\mu(\cdot)$ è tale e $E(\cdot)$ è continua.

(III). Per ogni $(p, z) \in P \times Z$, $\varphi(p, z)$ è non vuoto e convesso poiché tali sono $\mu(z)$ e $E(p)$.

Sussistono dunque le ipotesi del teorema di punto fisso di Kakutani. (8) Conseguentemente, esisterà $(p^0, z^0) \in P \times Z$ tale che: $(p^0, z^0) \in \varphi(p^0, z^0)$.

Ovvero: $p^0 \in \mu(z^0)$; $\qquad z^0 = E(p^0)$

Ricordando la definizione di $\mu(z)$ e la legge di Walras, otteniamo:

$$\hat{p} \cdot z^0 \leq p^0 \cdot z^0; \qquad p^0 \cdot z^0 = 0$$

da cui risulta:

$$\hat{p} \cdot z^0 \leq 0 \text{ per ogni } \hat{p} \in P$$

Assegnando a $\hat{p}$ i seguenti $n$ valori:

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

si perviene alla tesi:

$$z^0 = E(p^0) \leqq 0$$

Si osservi che, poiché la legge di Walras impone: $p^0 \cdot E(p^0) = 0$, se per $i = k$ dovesse risultare: $E_k(p^0) < 0$, ciò implicherebbe $p_k^0 = 0$. In tale caso saremmo in presenza di un bene libero.

# NOTE

(1). La dimostrazione qui esposta è una semplificazione di quanto contenuto in: G. DEBREU, *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959. A tale testo sono relativi i riferimenti che seguiranno. Tutti gli elementi di matematica necessari alla comprensione della presente esposizione sono reperibili in: chapter I, Mathematics, pp. 1-27.

(2). V. le definizioni: (h) a p. 3, (i) a p. 13, (s) a p. 14 e (q) a p. 23.

(3). Le dimostrazioni di tali proprietà non sono presenti in Debreu. Tuttavia sono deducibili a partire dalle definizioni: (i) a p. 6, (1) a p. 18, (h) a p. 3 e (q) a p. 23.

(4). Assumendo le condizioni limitative contenute nelle ultime due righe prima delle note a p. 72 e nelle ultime due righe a p. 48, si supporrà che $E(\cdot)$ sia una funzione. Tuttavia, l'estensione al caso che $E(\cdot)$ sia una corrispondenza implica modifiche marginali dell'apparato dimostrativo che seguirà.

(5). Ovvero: $z_i^0 = E_i(p^0) \leq 0$ per $i = 1, n$.

(6). V. la definizione (m) a p. 4.

(7). Le dimostrazioni delle proprietà (I), (II) e (III) non sono presenti in Debreu. Tuttavia sono deducibili a partire dalle definizioni già indicate.

(8). V. il teorema (2) a p. 26.