UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Michele Tucci

La determinazione di tecniche ottimali in un modello di Sraffa*

Istituto Matematico « Guido Castelnuovo »
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Michele Tucci

La determinazione di tecniche ottimali in un modello di Sraffa*

* Il contenuto del presente articolo è stato esposto dall'autore al Convegno del C.N.R. , G.N.A.F.A. , tenutosi a Rimini nel settembre 1978.

(1) Introduzione

Scopo della presente nota è una argomentazione formalizzata riguardante la determinazione di strutture produttive ottimali nell'ambito di una economia sraffiana. Il substrato teorico della trattazione è costituito dalla terza parte del libro di Piero Sraffa "Produzione di merci a mezzo di merci". Nell'ambito del riesame dei fondamenti della teoria economica innescato dall'opera di Piero Sraffa, lo studio dei mutamenti dei metodi di produzione ha costituito la chiave di volta delle critica di Cambridge ai paradigmi della teoria neoclassica; in quanto segue i medesimi suggerimenti teorici vengano rielaborati in un'ottica alquanto diversa.

Presupposto logico necessario allo studio di mutamenti dei metodi di produzione è che si definisca un insieme di metodi di produzione ammissibili, all'interno del quale si possa, mediante l'applicazione di uno specificato criterio di ottimalità, determinare il sottoinsieme dei metodi ottimali. Ne consegue che il criterio di ottimalità prescelto e le ipotesi assunte circa la natura dell'insieme dei metodi di produzione ammissibili condizionano in modo essenziale i risultati formali e le interpretazioni economiche del processo di ottimizzazione.

Il criterio di ottimalità che verrà preso in considerazione in queste note è quello descritto nella terza parte del libro di Piero Sraffa: vengono definiti ottimali, ad un livello dato del saggio di profitto, i metodi di produzione dell'economia le cui frontiere del salario appartengono all'inviluppo delle frontiere del salario dei metodi di produzione ammissibili. Circa la natura dell'insieme dei metodi di produzione ammissibili, verranno prese in considerazione assunzioni alternative e verranno messe a confronto le proposizioni dimostrabili a partire da ciascun sistema di ipotesi.

Allo scopo di una migliore descrizione della struttura dei sistemi di ipotesi, conviene premettere alcune specificazioni di natura formale (1). In quanto segue prenderemo in considerazione una economia composta da n industrie base, ciascuna delle quali produce una ed una sola merce. Ciascuna industria utilizza come input quantità delle n merci ed una quantità di lavoro omogeneo.

Si scelga un sistema di unità di misura fisiche per ciascuna delle n merci e per il lavoro omogeneo. Definiamo processo produttivo dell'industria i-esima un vettore a 2n + 1 componenti, strutturate come segue. Le prime n componenti rappresentano l'output del processo con rispetto a ciascuna delle n merci. Per la ipotesi di produzione singola, tali componenti risulteranno tutte nulle, ad eccezione dell'i-esima che sarà positiva. Le rimanenti n + 1 componenti rappresentano l'input del processo con rispetto a ciascuna delle n merci ed al lavoro omogeneo. Esse risulteranno positive o nulle; la componente $2n + 1$-esima, che si riferisce a quantità di lavoro omogeneo, sarà positiva. Ciascuna componente si intende misurata rispetto al sistema di unità di misura fisiche sopra introdotto.

Definiamo stato dell'economia un insieme di n processi, uno per ogni industria dell'economia. Si dispongono gli n processi che compongono uno stato su righe successive e si operino dei tagli verticali dopo le n-esime e le $2n$-esime componenti dei processi. Risulta immediato verificare che mediante tale ordinamento è possibile raggruppare i $2n^2 + n$ numeri reali che definiscono uno stato in una matrice diagonale di output, una matrice di input ed un vettore delle quantità di lavoro omogeneo.

Consideriamo uno stato dell'economia; in ciascun processo produttivo dividiamo tutte le componenti per la componente che rappresenta l'output del processo. Uno stato dell'economia così normalizzato verrà definito una tecnica dell'economia. Si noti che una tecnica dell'economia è caratterizzata dall'essere la matrice diagonale di output una matrice unitaria. Ogni stato dell'economia individua una sola tecnica; viceversa una medesima tecnica può essere individuata da una molteplicità di stati. Si osservi che la definizione di tecnica non presuppone alcuna ipotesi sulla natura dei rendimenti di scala. In generale saranno infatti specificati per ogni tecnica l'insieme dei livelli di produzione a cui tale tecnica può essere applicata. In tal modo possono definirsi per l'economia corrispondenze di produzione di natura affatto generale.

Consideriamo ora un particolare sistema di ipotesi circa la natura degli stati dell'economia, suscettibile di generare uno spazio di tecniche ammissibili dotato di significative proprietà formali ed economiche. Supponiamo che per ogni industria dell'economia siano disponibili un numero finito di processi produttivi ammissibili tali che godano della seguente proprietà.

(a) Ogni processo è a rendimenti costanti di scala. In ogni industria risulta dunque possibile, nell'ambito del soddisfacimento delle condizioni di reintegratività, alterare il livello a cui è operato il processo o sostituire il processo con un'altro ammissibile senza che tali operazioni influenzino in alcun modo i livelli e la natura dei processi impiegati nelle industrie rimanenti.(2)

L'assunzione (a) definisce uno spazio delle tecniche caratterizzato ~~dalle~~ seguenti proprietà:

(b) Ciascuna tecnica è individuata dall'intera classe degli stati che differiscono fra di loro per i diversi livelli a cui sono operati i medesimi processi; ovvero è

possibile operare ciascuna tecnica a qualsivoglia livelli, nell'ambito del soddisfacimento delle condizioni di reintegratività. (3)
(c) Sia m_1 il numero di processi alternativi disponibili per la prima industria, m_2 per la seconda industria e così via. Lo spazio delle tecniche ammissibili risulterà costituito da $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ tecniche, ottenute combinando ciascun processo ammissibile di una industria con tutti i processi ammissibili delle rimanenti industrie.

Nello spazio delle tecniche ammissibili in cui valgono le proprietà (b) e (c), prendiamo in considerazione due tecniche distinte. Per ciascuna delle n industrie, saranno ora disponibili due processi espressi in forma normalizzata: quello impiegato nella prima tecnica e quello impiegato nella seconda. Per qualche industria i due processi normalizzati potranno eventualmente coincidere. A partire dalle due tecniche in questione è dunque possibile costruire un sotto insieme dello spazio delle tecniche ammissibili contenente al più 2^n elementi. Applicando il criterio di ottimalità sopra descritto alle due tecniche di partenza, il sussistere delle proprietà (b) e (c) ci permette di eseguire il confronto mediante una catena di confronti fra tecniche a coppie distinte per il processo normalizzato impiegato in una sola industria ed appartenenti al sottoinsieme appena definito. In siffatta eventualità, possono provarsi i seguenti punti, validi per ogni valore del saggio di profitto inferiore od uguale al saggio di profitto massimo ammesso dallo spazio delle tecniche ammissibili. (4).

(d) L'ordinamento di ottimalità fra tecniche ammissibili è indipendente dalla composizione del pacchetto di beni il cui prezzo è utilizzato come unità di misura dei prezzi e del salario.

(e) Il sottoinsieme delle tecniche ottimali sarà in generale composto da molteplici elementi; purtuttavia ogni tecnica ottimale genererà il medesimo sistema di prezzi.

Il quadro risulta sostanzialmente mutato qualora si abbandoni l'ipotesi (a) e si considerino spazi delle tecniche ammissibili, di natura più generale. Lo abbandono dell' ipotesi (a) comporta che non necessariamente saranno verificate le proprietà (b) e (c). Il non sussistere della proprietà (b) comporta la necessaria introduzione di corrispondenze di produzione (5) che specifichino per ogni insieme di livelli di produne quali tecniche siano ammissibili. Il non sussistere della proprietà (c) fa sì che il confronto fra due tecniche non possa necessariamente avvenire mediante una catena di confronti fra tecniche a coppie distinte per il processo impiegato in una sola industria, bensì si debba procedere direttamente al confronto fra le due tecniche in questione. Le proprietà (d) e (e) saranno in generale invalidate e sostituite rispettivamente dalle seguenti proprietà.

(d') L'ordine di ottimalità fra le tecniche alternative è funzione della composizione del pacchetto di beni il cui prezzo è usato come unità di misura dei prezzi e del salario. (6)

(e') Il sottoinsieme delle tecniche ottimali sarà in generale composto da molteplici elementi; tecniche ottimali distinte possono generare sistemi di prezzi distinti. (7)

Nei casi in cui sussiste la proprietà (d') si può concludere che nel problema della determinazione di tecniche ottimali il pacchetto di beni, il cui prezzo è utilizzato per misurare i prezzi ed il salario, non può considerarsi una semplice unità di misura; viceversa esso assume il ruolo di una variabile del problema, suscettibile quindi di influenzarne sostanzialmente la soluzione.

Diviene dunque necessità imprescindibile lo attribuire a tale pacchetto un preciso significato economico, in connessione con la natura del fenomeno economico che mediante il modello si vuole investigare. Poichè il criterio di ottimalità in base al quale si è proceduto alla determinazione del sottoinsieme delle tecniche ottimali, consiste nella massimizzazione del salario ad un livello dato del saggio di profitto, il rispetto di una coerenza semantica suggerisce che si interpreti il pacchetto di cui sopra come indicante la composizione del salario materiale, cioè la composizione di quel pacchetto di beni in cui si traduce lo scalare "salario" specificato nel modello.

Il sussistere della proprietà (e') dà luogo a casi degni di interesse. Si supponga che, per una specificata composizione del salario materiale e ad un livello dato del saggio di profitto, due tecniche ottimali, tali cioè da ammettere lo stesso livello di salario, generino sistemi di prezzi distinti tali che, ad esempio, nella prima industria il prezzo generato dalla prima tecnica sia superiore a quello generato dalla seconda; nella seconda industria accada viceversa. Rispetto al criterio microeconomico della minimizzazione dei costi di produzione, un imprenditore che operasse nella prima industria avrebbe interesse a che l'economia assuma uno stato rappresentato dalla seconda tecnica. Viceversa un imprenditore che operi nella seconda industria avrebbe interesse a che l'economia assuma uno stato rappresentato dalla prima tecnica. Viene così a cadere la compatibilità fra criterio di ottimalità microeconomico e criterio di ottimalità macroeconomica che si dimostra (8) sussistente nel caso si assuma l'ipotesi (a); la condizione in cui operano gli imprenditori sopra ipotizzati è certamente di tipo non concorrenziale. (9)

NOTE

(1) Le definizioni di processo produttivo, stato dell'economia e tecnica dell'economia sono formulate matematicamente in par. (2); le condizioni di reintegratività dello stato e di vitalità della tecnica sono ivi esplicitate.

(2) Formalmente la proprietà (a) può essere espressa in termini di divisibilità e addittività dei processi ammissibili disponibili per ciascuna industria. Vedi a tale proposito la formalizzazione della proprietà (a) precedente alla proposizione (x) in par. (4).

(3) Per la definizione di spazio delle tecniche a rendimenti costanti di scala vedi il par. (2).

(4) Per la formalizzazione del processo di confronto sopra descritto e le dimostrazioni dei punti (d) e (e), vedi il rif. (3).

(5) Per la definizione di corrispondenza di produzione, vedi il par. (2).

(6) Vedi l'esempio numerico che illustra la proposizione (ix) in par. (4).

(7) Vedi l'esempio numerico che illustra la proposizione (viii) in par. (4).

(8) Vedi il rif. (2).

(9) Non sorprendentemente, riaffiora la tesi del saggio di Piero Sraffa "Sulle relazioni tra costo e quantità prodotta": solamente condizioni di produzione risultanti in costi costanti, nel nostro caso spazi di tecniche che godono della proprietà (a), sono compatibili con lo stato di libera concorrenza.

(2) Spazio degli stati della struttura produttiva di una economia.

Consideriamo una economia sraffiana costituita da n industrie base a produzione singola. Definiamo un sistema di unità di misura fisiche $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n; u_\ell\}$ per ciascuno degli n beni e per il lavoro omogeneo.

Definiamo stato della struttura produttiva dell'economia il seguente insieme di grandezze misurate secondo U :

$$S = \{D, Q, L\},$$

dove:

D matrice $(n \times n)$, diagonale, $d_{ii} > 0$ per $i=1,n$. L'elemento della diagonale principale d_{ii} indica il prodotto lordo dell'industria i-esima.

Q matrice $(n \times n)$, non negativa, indecomponibile. L'elemento generico q_{ij} indica la quantità del bene j-esimo usato nell'industria i-esima.

Per ipotesi le matrici D e Q soddisfino la seguente condizione di reintegratività dello stato S :

$\Sigma(D-Q) \geq 0, \neq 0$, ove $\Sigma = (1, 1, \ldots, 1)$.

L n-vettore colonna, strettamente positivo. La componente generica L_i indica la quantità di lavo ro omogeneo impiegata nell'industria i-esima.

Si noti che ad ogni stato S risulta univocamente associato il seguente vettore:

$$c = \Sigma(D-Q).$$

Il vettore C risulta non negativo, non nullo per l'ipotesi di reintegratività dello stato. La componente generica C_i indica il prodotto netto dell'economia per il bene i-esimo.

Consideriamo lo spazio prodotto cartesiano:

$$R^{n^2+2n} = R^n \times R^{n^2} \times R^n.$$

Risulterà: $S \in R^{n^2+2n}$.

Definiamo spazio degli stati della struttura produttiva dell'economia il seguente insieme $\mathcal{S}$ appartenente a R^{n^2+2n}:

$$\mathcal{S} = \left\{ S=\{D,Q,L\} : d_{ii}>0 \text{ per } i=1,n;\ Q\geq 0, \neq 0, \text{ indecomponibile};\ \Sigma(D-Q)\geq 0,\neq 0;\ L_i>0 \text{ per } i=1,n \right\}.$$

Consideriamo la seguente relazione Ω definita per una coppia di elementi di $\mathcal{S}$:

sia $S_1=\{D_1, Q_1, L_1\}$, $S_2=\{D_2, Q_2, L_2\} \in \mathcal{S}$;

sarà $S_1 \,\Omega\, S_2$ se e solo se:

$$\begin{cases} Q_2 = D_2 D_1^{-1} Q_1 \\ L_2 = D_2 D_1^{-1} L_1 . \end{cases}$$

Si possono provare le seguenti proposizioni.

(i). La relazione Ω è una relazione di equivalenza.

Dim. Sia $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$. Risultano vere le seguenti proprietà:

$S_1 \,\Omega\, S_1$; infatti sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} Q_1 = D_1 D_1^{-1} Q_1 \\ L_1 = D_1 D_1^{-1} L_1 . \end{cases}$$

$S_1 \,\Omega\, S_2 \Rightarrow S_2 \,\Omega\, S_1$; infatti è vera la seguente implicazione:

$$\begin{cases} Q_2 = D_2 D_1^{-1} Q_1 \\ L_2 = D_2 D_1^{-1} L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = D_1 D_2^{-1} Q_2 \\ L_1 = D_1 D_2^{-1} Q_2 . \end{cases}$$

$S_1 \,\Omega\, S_2$ e $S_2 \,\Omega\, S_3 \Rightarrow S_1 \,\Omega\, S_3$; infatti sono vere le seguenti implicazioni:

$$\begin{cases} Q_2 = D_2 D_1^{-1} Q_1 \\ Q_3 = D_3 D_2^{-1} Q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_2 = D_2 D_1^{-1} Q_1 \\ Q_2 = D_2 D_3^{-1} Q_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_2 D_3^{-1} Q_3 = D_2 D_1^{-1} Q_1 \Rightarrow Q_3 = D_3 D_1^{-1} Q_1 .$$

Con passaggi analoghi si ottiene l'implicazione:

$$\begin{cases} L_2 = D_2 D_1^{-1} L_1 \\ L_3 = D_3 D_2^{-1} L_3 \end{cases} \Rightarrow L_3 = D_3 D_1^{-1} L_1 .$$

Q.E.D.

(ii). La relazione di equivalenza Ω è indipendente dal sistema di unità di misura.

Dim. Siano $\hat{U} = \{ \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n ; \hat{u}_\ell \}$

e $\widetilde{U}=\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n; u_\ell\}$ due sistemi di unità di misura. Definiamo:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\hat{u}_1}{\tilde{u}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\hat{u}_n}{\tilde{u}_n} \end{bmatrix} ; \quad K_\ell = \frac{\hat{u}_\ell}{\tilde{u}_\ell} .$$

Sia $\tilde{s}$ un elemento di $\mathcal{S}$ misurato secondo $\widetilde{U}$.
Il passaggio dal sistema di unità di misura $\widetilde{U}$ al sistema di unità di misura $\widehat{U}$ comporta la seguente trasformazione su $\tilde{s}$:

$$\hat{s} = \{\hat{D}, \hat{Q}, \hat{L}\} = \{\tilde{D}K, \tilde{Q}K, \tilde{L}K_\ell\} .$$

Saranno dunque vere le seguenti implicazioni:

$$\hat{Q}_2 = \hat{D}_2 \hat{D}_1^{-1} \hat{Q}_1 \Rightarrow \tilde{Q}_2 K = \tilde{D}_2 K (\tilde{D}_1 K)^{-1} \tilde{Q}_1 K \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{Q}_2 = \tilde{D}_2 K K^{-1} \tilde{D}_1^{-1} \tilde{Q}_1 \Rightarrow \tilde{Q}_2 = \tilde{D}_2 \tilde{D}_1^{-1} \tilde{Q}_1 .$$
$$\hat{L}_2 = \hat{D}_2 \hat{D}_1^{-1} \hat{L}_1 \Rightarrow \tilde{L}_2 K_\ell = \tilde{D}_2 \tilde{D}_1^{-1} \tilde{L}_1 K_\ell \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{L}_2 = \tilde{D}_2 \tilde{D}_1^{-1} L_1 .$$

Q.E.D.

(iii). A ciascuna classe di equivalenza $[s]_\Omega$ può essere associato uno ed un solo elemento $s' = \{I, A, \ell\}$ tale che, se $s = \{D, Q, L\} \in [s]_\Omega$, allora $s = \{D, DA, D\ell\}$.
Nota: s' non appartiene necessariamente a $\mathcal{S}$; non è infatti necessariamente verificata la condizione: $\Sigma(I-A) \geq 0, \neq 0$.

Dim. Sia: $s_1 = \{D_1, Q_1, L_1\} \in [s]_\Omega$, $D_1^{-1} Q_1 = A$, $D_1^{-1} L_1 = \ell$. Se: $s = \{D, Q, L\} \in [s]_\Omega$, per la definizione di Ω deve necessariamente essere:
$D^{-1} Q = D_1^{-1} Q_1 = A$, $D^{-1} L = D_1^{-1} L_1 = \ell$. Inoltre, considerati

$s_1'=\{I,A_1,\ell_1\}$, $s_2'=\{I,A_2,\ell_2\}$ tali che non sia $A_1=A_2$, e $\ell_1=\ell_2$, qualunque sia D non potrà mai verificarsi $DA_1=DA_2$ e $D\ell_1=D\ell_2$. Q.E.D.

Nota. Sia $\lambda(A)$ l'autovalore di Perron e Frobenius di A ①. Risulterà: $0<\lambda(A)<1$.

Dim. Sia $S=\{D,Q,L\}\in[S]_\Omega$ e $Q=DA$, $L=D\ell$.

Dalle condizioni di reitegratività di S viene:

$\Sigma(D-Q)\geqslant 0, \neq 0$, da cui:

(1) $\Sigma(D-DA)\geqslant 0, \neq 0$

Moltiplicando a destra la (1) per D^{-1} otteniamo:

$\Sigma(I-DAD^{-1})\geqslant 0, \neq 0$, da cui viene:

(2) $\Sigma DAD^{-1}\leqslant\Sigma, \neq\Sigma$.

La (2) ci assicura che: $0<\lambda(DAD^{-1})<1$ ②. Essendo $\lambda(DAD^{-1})=\lambda(A)$, risulta $0<\lambda(A)<1$. Q.E.D.

(iv). Sia dato un vettore del prodotto netto $\bar{c}$ non negativo, non nullo. Ciascuna classe di equivalenza contiene uno ed un solo stato $\bar{S}=\{\bar{D},\bar{Q},\bar{L}\}$ tale che: $\Sigma(\bar{D}-\bar{Q})=\bar{c}$.

Dim. Sia $S=\{D,Q,L\}\in[S]_\Omega$. Per la (iii) S sarà rappresentabile come: $S=\{D,DA,D\ell\}$.

Si tratta di provare che esiste una ed una sola D tale che: $\Sigma(D-DA)=\bar{c}$,ovvero:

(3) $\Sigma D(I-A)=\bar{c}$.

Per un noto teorema sull'inversione matriciale:

(4) $\lambda(A)<1 \Longrightarrow (I-A)^{-1}>0$.

Per cui dalla (3) otteniamo:

$$\Sigma D = \bar{\varsigma}(I-A)^{-1} > 0 \ .$$

Q.E.D.

Sia $S = \{D, Q, L\} \in \mathcal{S}$ Consideriamo il modello di Sraffa definito su $\mathcal{S}$:

$$(5) \quad \begin{cases} (D - \rho Q)p + Lw = 0 \\ \mu p = 1 \end{cases} ,$$

dove:

p n-vettore colonna, strettamente positivo. La componente generica p_i indica il prezzo di una unità del bene i-esimo.

μ n-vettore riga, non negativo, non nullo. La componente generica μ_i indica la proporzione con cui il bene i-esimo entra nel pacchetto dei beni salario (3). Si consideri ad esempio la normalizzazione: $\mu \Sigma' = 1$.

$\rho = 1+r$ ove lo scalare $r \geq 0$ indica il saggio di profitto.

w scalare non negativo. Indica il salario reale.

Sussiste la seguente proposizione.

(v). Stati appartenenti alla medesima classe di equivalenza $[S]_\Omega$ individuano il medesimo modello di Sraffa definito dalle equazioni (5).

Dim. Sia $S' = \{I, A, \ell\} \leftrightarrow [S]_\Omega$.

Allora ogni $S \in [S]_\Omega$ può essere rappresentato come $S = \{D, DA, D\ell\}$.

Sostituendo nelle equazioni (5) risulta:

$$(6)\quad \begin{cases} (D - \rho DA)p + D\ell w = 0 \\ \mu p = 1 \end{cases}.$$

Dalle equazioni (6) si ottiene il seguente sistema equivalente:

$$(7)\quad \begin{cases} D[(I - \rho A)p + \ell w] = 0 \\ \mu p = 1 \end{cases}.$$

Essendo per definizione $d_{ii} > 0$ per $i = 1, n$, le equazioni (7) risultano equivalenti al seguente sistema:

$$(8)\quad \begin{cases} (I - \rho A)p + \ell w = 0 \\ \mu p = 1 \end{cases}.$$

Sarà dunque vera la seguente corrispondenza biunivoca:

$$[S]_\Omega \longleftrightarrow \text{sistema } (8).$$ Q.E.D.

Definiamo ciascuna classe di equivalenza $[S]_\Omega$ una tecnica a rendimenti costanti. Come è stato dimostrato nella (v), tutti gli stati appartenenti ad una medesima classe di equivalenza $[S]_\Omega$ individuano il medesimo sistema di equazioni di Sraffa. Qualora si vogliano studiare proprietà dell'economia dipendenti esclusivamente dalle grandezze (ρ, w, p) individuate dalle equazio ni di Sraffa, è possibile rappresentare la tecnica mediante l'elemento $s' = \{I, A, \ell\} \leftrightarrow [S]\, \Omega$.

Definiamo spazio delle tecniche a rendimenti costanti il seguente insieme:

$$\mathcal{S}' = \{ s' = \{I, A, \ell\} : s' \leftrightarrow [S]\, \Omega \}.$$

Ad ogni elemento $s' = \{I, A, \ell\} \in \mathcal{S}'$ risulta associato il seguente insieme:

$$Z_{s'} = \{ D : \Sigma (D - DA) \geq 0, \neq 0 \}.$$

L'insieme $Z_{s'}$ costituisce l'insieme degli stati appartenenti alla tecnica a rendimenti costanti rappresentata da s'.

A partire dallo spazio delle tecniche a rendimenti costanti è possibile definire sistemi di tecniche ammissibili di natura affatto generale. A tale scopo definiamo la seguente corrispondenza di produzione $R^n \longrightarrow 2^{\mathcal{S}'}$:

$$D \longrightarrow T(D) \subseteq \mathcal{S}'.$$

Tale corrispondenza specifica per ogni insieme di livelli dei prodotti lordi le tecniche considerate ammissibili. Affinche gli stati generati dalla corrispondenza di produzione siano reintegrativi, deve risultare:

$$D \in Z_{s'} \quad \text{per ogni} \quad s' \in T(D) :$$

Note.

1 . Vedi rif. (1) e (5).

2 . Vedi rif. (1) e (5).

3 . Confronta rif. (2), nota 18.

(3) Massimizzazione del salario reale a saggio di profitto dato su sottoinsiemi compatti dello spazio degli stati.

Sia $s' = \{I, A, \ell\} \in S'$. Consideriamo il sistema di equazioni (8). Si può dimostrare che per valori del parametro ρ compresi fra $1 \leq \rho \leq 1 + R(A)$, ove $R(A) = \dfrac{1 - \lambda(A)}{\lambda(A)}$ e $\lambda(A)$ è l'autovalore di Perron e Frobenius di A, il sistema di equazioni (8) ammette le seguenti soluzioni (1):

$$
\text{per } 1 \leq \rho < 1 + R(A): \quad \begin{cases} p = \dfrac{(I - \rho A)^{-1}\ell}{\mu (I - \rho A)^{-1}\ell} > 0 \\[2ex] w = \dfrac{1}{\mu (I - \rho A)^{-1}\ell} > 0 \end{cases}
$$

(9)

$$
\text{per } \rho = 1 + R(A): \quad \begin{cases} p = \dfrac{x}{\mu x} \\ w = 0 \end{cases} ,
$$

ove x è l'autovettore di Perron e Frobenius di A associato a $\lambda(A)$.

Consideriamo il seguente lemma.

Lemma (1). Sia ϕ un funzionale $R^m \to R^1$, definito sull'insieme compatto $L \subset R^m$ ed ivi continuo. Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di $\hat{\phi}$ e $\tilde{\phi}$ tali che:

$$
\hat{\phi} = \max_{\ell \in L} \phi(\ell), \quad \tilde{\phi} = \min_{\ell \in L} \phi(\ell).
$$

Consideriamo la collezione di insiemi inclusa in L:

$$H_\alpha = \{\ell \in L : \alpha \leq \phi(\ell) \leq \hat{\phi}\},$$

ove α è un reale tale che: $\alpha \leq \hat{\phi}$.

Ciascun H_α della collezione è un compatto.

Nota. Se $\alpha < \tilde{\phi}$ allora $H_\alpha = L$. Inoltre ciascun H_α sarà non vuoto dovendo contenere almeno un $\hat{\ell} \in L$ tale che: $\phi(\hat{\ell}) = \hat{\phi}$.

Dim. Sussiste il seguente teorema.

(a) " Sia $y = f(x)$ una funzione definita nello spazio topologico S_x ed avente codominio contenuto nello spazio topologico S_y. Sia $f(x)$ continua in S_x. Se C_y è un insieme chiuso dello spazio topologico $f(S_x)$, allora $f^{-1}(C_y)$ è un insieme chiuso di S_x " ②.

Per definizione risulta: $H_\alpha = \phi^{-1}(B)$, ove $B = \phi(L) \cap \{x \in R^1 : \alpha \leq x \leq \hat{\phi}\}$ è un insieme chiuso di R^1. Dal teorema (a) se ne deduce che H_α è un insieme chiuso di R^m. Sarà inoltre $H_\alpha \subseteq L$, ove L è un insieme limitato di R^m. H_α è dunque un insieme chiuso e limitato di R^m e quindi un compatto.

Q.E.D.

Consideriamo un sottoinsieme compatto $T \subset S^1$ e consideriamo il funzionale reale, definito su T ed ivi continuo ③:

$$R(A) = \frac{1 - \lambda(A)}{\lambda(A)}.$$

Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di $\hat{R}$ e $\tilde{R}$ tali che:

$$\hat{R} = \max_{t \in T} R(A) \quad , \quad \tilde{R} = \min_{t \in T} R(A) .$$

Sia $\bar{\tau}$ un reale tale che $\bar{\tau} \leq \hat{R}$.

Consideriamo l'insieme:

$$H_{\bar{\tau}} = \left\{ t \in T : \quad \bar{\tau} \leq R(A) \leq \hat{R} \right\} .$$

Per il lemma (1), l'insieme $H_{\bar{\tau}}$ sarà non vuoto e compatto.

Consideriamo il seguente funzionale reale, definico su $H_{\bar{\tau}}$ ed ivi continuo (4), per un valore del parametro $\bar{\rho} = 1 + \bar{\tau}$:

$$(10) \qquad w(t, \bar{\rho}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(I - \bar{\rho}A)^{-1} \ell} & \text{se } R(A) > \bar{\tau} \\ 0 & \text{se } R(A) = \bar{\tau} \end{cases}$$

Si noti che se $t \in H_{\bar{\tau}}$, allora $w(t, \bar{\rho}) \geq 0$; inoltre se $t' \in T$ e $w(t', \bar{\rho}) \geq 0$, allora necessariamente $t' \in H_{\bar{\tau}}$.

Sussistono le seguenti proposizioni.

(vi) Consideriamo un sottoinsieme compatto $T \subset S^1$ e sia $\hat{R} = \max_{t \in T} R(A)$.

Sia $\bar{\tau}$ un reale tale che: $0 \leq \bar{\tau} \leq \hat{R}$.

Sia $\bar{\rho} = 1 + \bar{\tau}$. Consideriamo il seguente funzionale reale, definito su $\mathcal{T}$:

$$w(t,\bar{\rho}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(I-\bar{\rho}A)^{-1}\ell} & \text{se } R(A) \neq \bar{z} \\ 0 & \text{se } R(A) = \bar{z} \end{cases} .$$

Esiste un sottoinsieme non vuoto $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}} \subseteq \mathcal{T}$ tale che se $\hat{t} \in \hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}}$, allora $w(\hat{t},\bar{\rho}) = \max_{t\in\mathcal{T}} w(t,\bar{\rho})$.

Dim. Basterà limitarci a considerare il funzionale reale (10), definito su $H_{\bar{z}}$ ed ivi continuo. Per il teorema di Weierstrass esisterà almeno un $\hat{t} \in H_{\bar{z}}$ tale che:

$$w(\hat{t},\bar{\rho}) = \max_{t\in H_{\bar{z}}} w(t,\bar{\rho}) .$$

Q.E.D.

Nota. L'insieme $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}}$ è un insieme compatto.

Dim. Sia $\hat{w}_{\bar{\rho}} = w(\hat{t},\bar{\rho}) = \max_{t\in H_{\bar{z}}} w(t,\bar{\rho})$.

Sarà: $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}} = w^{-1}(\hat{w}_{\bar{\rho}},\bar{\rho})$. Per il teorema (a), $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}}$ è un insieme chiuso. Essendo $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}} \subseteq H_{\bar{z}}$, ove $H_{\bar{z}}$ è un insieme limitato, l'insieme $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{z}}$ sarà chiuso e limitato, dunque **compatto**.

Q.E.D.

Note.

1. Per la dimostrazione, vedi rif. (5).
2. Vedi ad esempio il teorema LXXXIV in Picone M., Fichera G., "Lezioni di analisi matematica" Roma 1962.
3. Se $t\in\mathcal{T}$, allora $0 < \lambda(A) < 1$. Inoltre, essendo radice del polinomio caratteristico $\det(\mu I-A)$, $\lambda(A)$ sarà

funzione continua di a_{ij}, per $i,j = 1,n$.

④. Sia $\bar{t} = \{I, \bar{A}, \bar{\ell}\}$ tale che $R(\bar{A}) = \bar{\varepsilon}$ Risulta:

$$\lim_{\substack{t \to \bar{t} \\ t \in H_{\bar{\varepsilon}}}} \frac{1}{\mu(I - \rho A)^{-1} \ell} = 0 .$$

(4) Osservazioni ed esempi.

Sia $\mathcal{T}$ un insieme compatto di tecniche ammissibili e $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{\tau}} \subseteq \mathcal{T}$ il sottoinsieme delle tecniche ottimali per $\tau = \bar{\tau}$. Le considerazioni esposte nel paragrafo (3) sono completate dalle seguenti osservazioni (1).

(viii). In generale l'insieme $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{\tau}}$ contiene più di un elemento di $\mathcal{T}$.

Si consideri il seguente esempio:

$\mathcal{T} = \{t_1, t_2\}$, ove:

$$t_1 = \left\{ I, A_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \ell_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad t_2 = \left\{ I, A_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.45 \end{pmatrix}, \ell_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sia inoltre: $\bar{\rho} = 1 + \bar{\tau} = 1.5$; $\mu = (76 , 123)$.

Viene: $w(t_1, \bar{\rho}) = w(t_2, \bar{\rho}) = 1/3340$;

per cui: $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{\tau}} = \mathcal{T}$.

Si noti che risulta: $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{6.4}{3340} \\ \frac{23.2}{3340} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \frac{15.625}{3340} \\ \frac{17.5}{3340} \end{pmatrix}$.

(ix). In generale l'insieme $\hat{\mathcal{T}}_{\bar{\tau}}$ è funzione dei valori assegnati a μ .

Si consideri il seguente esempio:

$\mathcal{T} = \{t_1, t_2\}$, ove:

$$t_1 = \left\{ I, A_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.05 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \ell_1 = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0.3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$t_2 = \left\{ I, A_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.05 & 0.03 & 0.1 \end{pmatrix}, \ell_2 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.65 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Consideriamo i funzionali:

$$w(t_1,\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(I-\rho A_1)^{-1}\ell_1} & \text{nell'intervallo: } 1 \leq \rho < R(A_1) \\ 0 & \text{per: } \rho = R(A_1) \end{cases}$$

(11)

$$w(t_2,\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(I-\rho A_2)^{-1}\ell_2} & \text{nell'intervallo: } 1 \leq \rho < R(A_2) \\ 0 & \text{per: } \rho = R(A_2). \end{cases}$$

Si noti che risulta: $R(A_1) < R(A_2)$.

Le tavole (1), (2), (3), (4) (2) illustrano i grafici dei funzionali (11) avendo posto μ uguale nell'ordine a:

$$\mu_1 = (0.1,\ 0.2,\ 0.7),\quad \mu_2 = (0.6,\ 0.25,\ 0.15),$$
$$\mu_3 = (0,\ 1,\ 0),\quad \mu_4 = (0.4,\ 0.1,\ 0.5).$$

Si considerino valori $\bar{\rho}$ compresi nell'intervallo $1 \leq \bar{\rho} \leq R(A_1)$. Si otterranno diversi $\hat{T}_{\bar{\rho}}(\mu)$ in dipendenza dei valori assunti da μ.

L'osservazione (ix) trova la sua spiegazione nelle seguenti considerazioni.

Consideriamo l'insieme $T = \{t_1, t_2\}$; sia $R(A_1) < R(A_2)$.

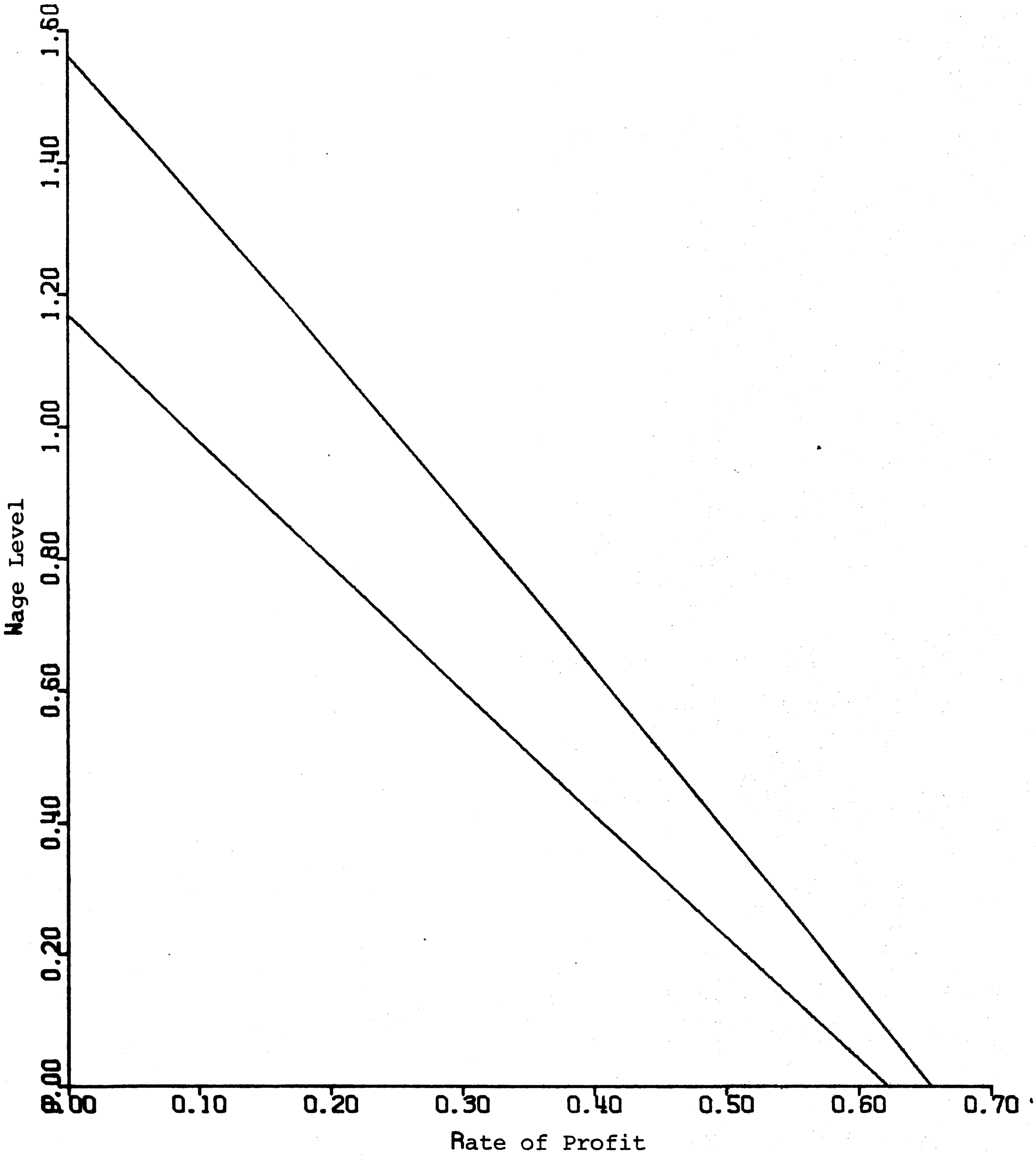
Consideriamo i funzionali (11) nell'intervallo:

$$\mathcal{O} = \{\rho : 1 \leq \rho \leq R(A_1)\}.$$

Consideriamo il seguente insieme:

$$V = \{\rho \in \mathcal{O} : w(t_1,\rho) = w(t_2,\rho)\}.$$

L'insieme V include tutti i punti di "switch"



1.60
1.40
1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
Wage Level
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
Rate of Profit

FIG. 1

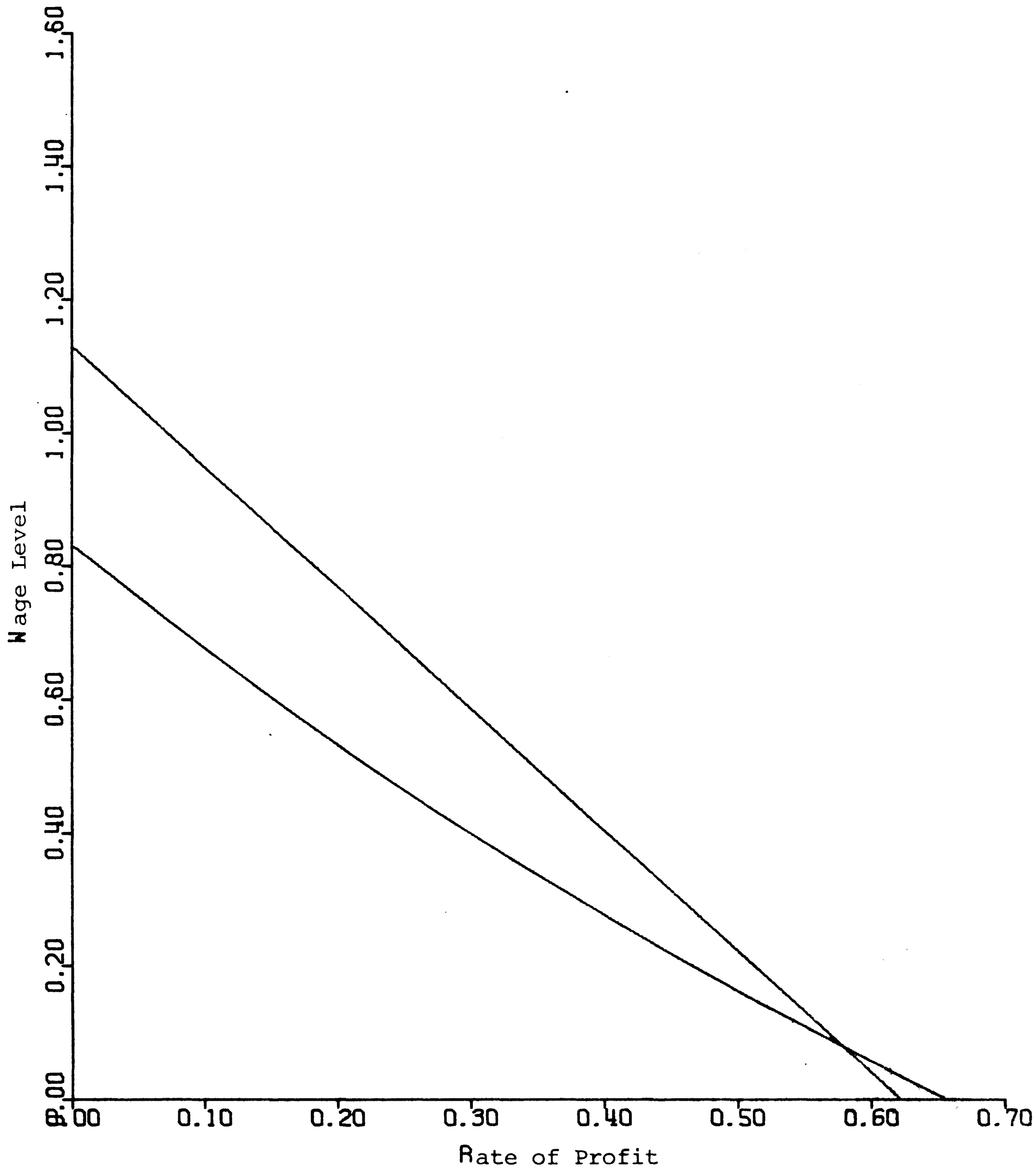

1.60
1.40
1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
Wage Level
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
Rate of Profit

FIG. 2

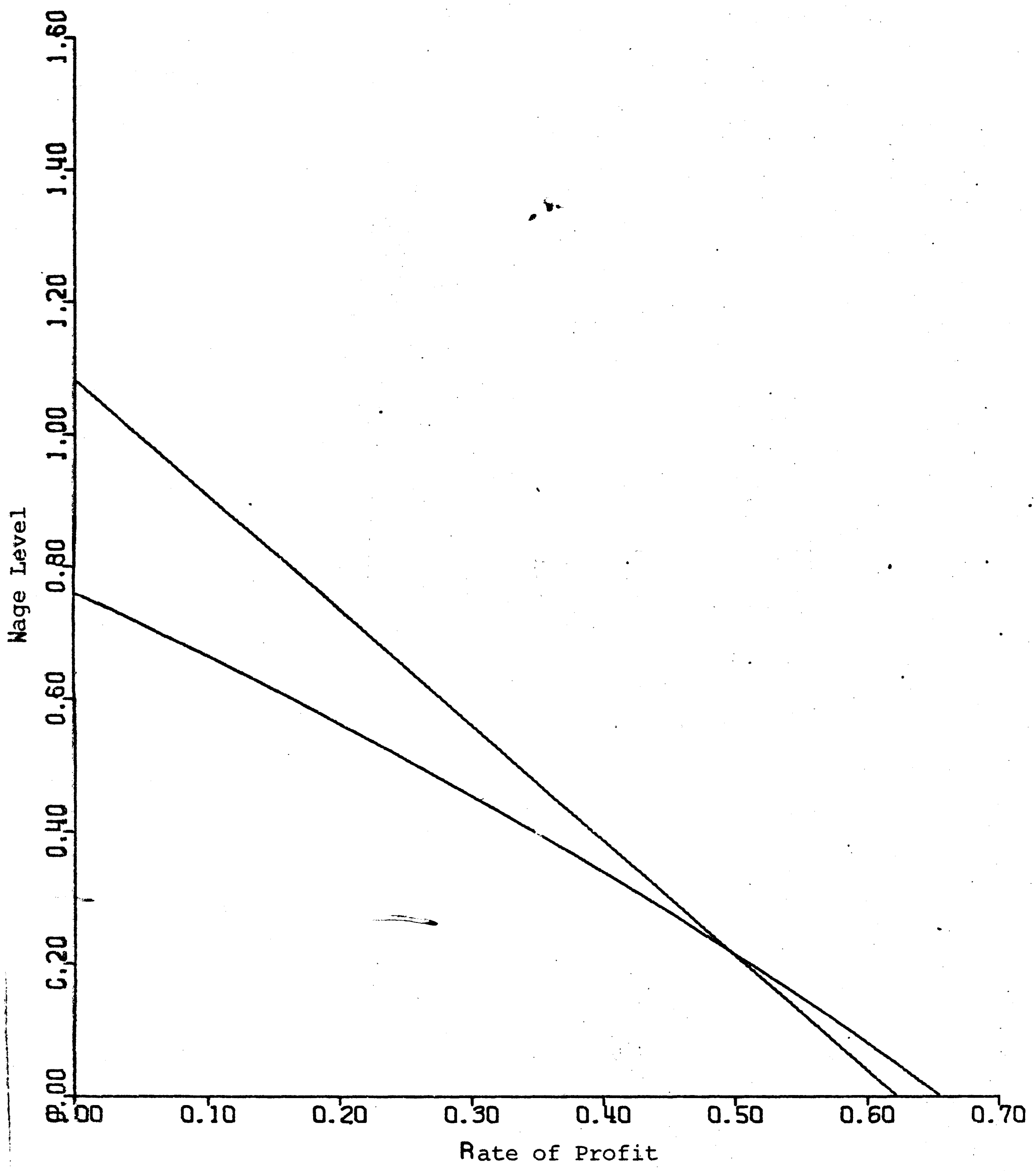

Wage Level
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
Rate of Profit

FIG. 3

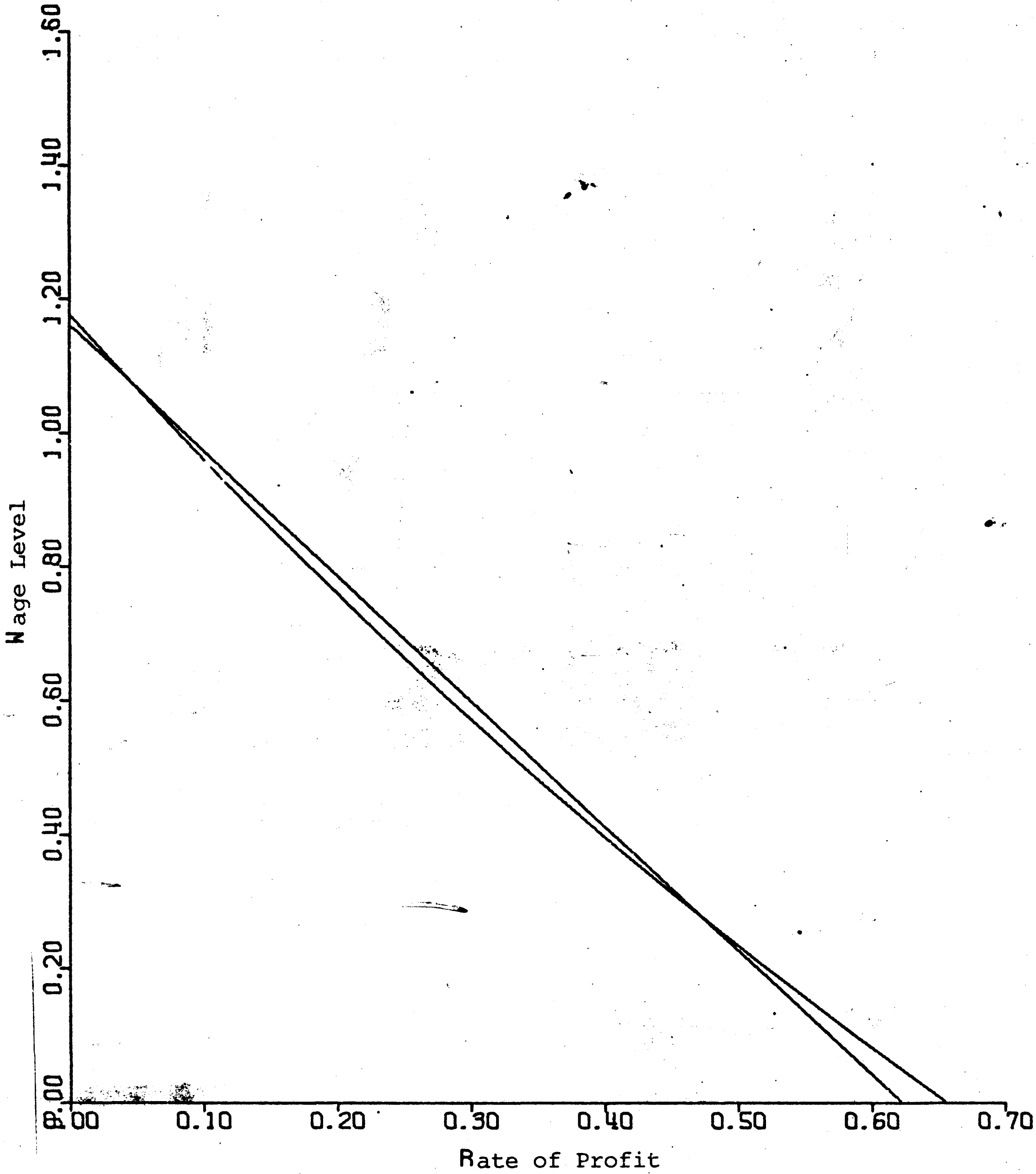

Wage Level
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
Rate of Profit

FIG. 4

fra gli stati t_1 e t_2. Consideriamo gli insiemi:

$$\Gamma' = \{\rho \in \Theta : (I-\rho A_1)^{-1} \ell_1 = (I-\rho A_2)^{-1} \ell_2\};$$

$$(12) \quad \Gamma''_{\mu} = \{\rho \in \Theta : (I-\rho A_1)^{-1} \ell_1 \neq (I-\rho A_2)^{-1} \ell_2, \mu[(I-\rho A_1)^{-1} \ell_1 - (I-\rho A_2)^{-1} \ell_2] = 0\}.$$

Sarà evidentemente $\Gamma' \cup \Gamma''_{\mu} = \Gamma$.

L'insieme Γ' è indipendente dai valori assunti da μ mentre l'insieme Γ''_{μ} è da essi dipendente. In generale quindi l'insieme Γ sarà dipendente dai valori assunti da μ.

Consideriamo un $\bar{\rho} \in \Gamma$. Per $\rho = \bar{\rho}$ consideriamo il sistema di equazioni (8) rispettivamente per t_1 e t_2. La soluzione sarà data dalle espressioni (9). Se $\bar{\rho} \in \Gamma'$, otterremo necessariamente:

$$p(t_1, \bar{\rho}) = p(t_2, \bar{\rho}),$$
$$w(t_1, \bar{\rho}) = w(t_2, \bar{\rho}).$$

I sistemi di prezzi e salario individuati dal sistema di Sraffa per t_1 e t_2 nel punto $\rho = \bar{\rho}$ coincideranno.

Viceversa, sia $\bar{\rho} \in \Gamma''_{\mu}$. Dalle (9) otteniamo:

$$p(t_1, \bar{\rho}) \neq p(t_2, \bar{\rho}),$$
$$w(t_1, \bar{\rho}) = w(t_2, \bar{\rho}).$$

I sistemi di prezzi individuati dal sistema di Sraffa per t_1 e t_2 nel punto $\rho = \bar{\rho}$ saranno distinti pur essendo uguali i livelli del salario reale. Un esempio di tale evenienza è riportato nella (viii).

Consideriamo ora il medesimo processo di massimizzazione descritto nel paragrafo (3) considerando ipotesi più restrittive sull'insieme T' . Sia ora T' un sottoinsieme di S' che gode delle seguenti proprietà:

(b) Supponiamo che la struttura dell'industria i-esima sia costituita dalla combinazione lineare secondo i coefficienti K_{ij} (con $K_{ij} \geq 0$ per $j=1, m_i$ e $\sum_{j=1,m_i} K_{ij} = 1$) dei seguenti m_i processi produttivi: $T_{ij} = \{d_i; t_{ij}; l_{ij}\}$ con $j = 1, m_i$, dove:

d_i: n-vettore riga; $(d_i)_f = 0$ per $f \neq i$, $(d_i)_f = 1$ per $f = i$. Rappresenta il vettore del prodotto lordo di ciascuno degli m_i processi produttivi.

t_{ij} : n-vettore riga, non negativo, non nullo. La componente generica $(t_{ij})_f$ rappresenta la quantità del bene f-esimo usato nel processo produttivo j-esimo.

l_{ij} : scalare positivo; rappresenta la quantità di lavoro omogeneo impiegata nel processo produttivo j-esimo.

Sia l'insieme T' composto da tutti e soli gli elementi t esprimibili nel modo seguente:

$$t = \left\{ I, A = \begin{pmatrix} K_{11}t_{11} + K_{12}t_{12} + \cdots + K_{1m_1}t_{1m_1} \\ K_{21}t_{21} + K_{22}t_{22} + \cdots + K_{2m_2}t_{2m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{n1}t_{n1} + K_{n2}t_{n2} + \cdots + K_{nm_n}t_{nm_n} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. l = \begin{pmatrix} K_{11}l_{11} + K_{12}l_{12} + \cdots + K_{1m_1}l_{1m_1} \\ K_{21}l_{21} + K_{22}l_{22} + \cdots + K_{2m_2}l_{2m_2} \\ K_{n1}l_{n1} + K_{n2}l_{n2} + \cdots + K_{nm_n}l_{nm_n} \end{pmatrix} \right\};$$

ove: $K_{ij} \geq 0$ per $i=1,n$, $j=1,m_i$; $\sum_{j=1,m_i} K_{ij} = 1$ per $i=1,n$.

Si noti che la proprietà (b) implica la compattezza dell'insieme Π.

Consideriamo il sottoinsieme finito $\overline{\Pi} \subset \Pi$ composto dagli $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ elementi di Π ottenuti assegnando a ciascuno degli n insiemi di parametri $\{K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{im_i}\}$ per $i=1,n$, i seguenti m_i sistemi di valori: $\{1,0,0,\ldots 0\}, \{0,1,0,\ldots,0\}, \ldots, \{0,0,0,\ldots,1\}$.

A partire dalla proprietà (b) si possono provare i seguenti punti (3).

(x). Esiste un sottoinsieme non vuoto $\hat{\Pi}_{\bar{z}} \subseteq \overline{\Pi}$ che gode della proprietà descritta in (vi).

(xi). $\hat{\Pi}_{\bar{z}}$ è indipendente dai valori assegnati a μ.

Anche in questo caso rimane valida l'osservazione (viii).

Un esempio di elemento generico t esprimibile nella forma (13) è il seguente:

$$t = \left\{ I,\ A = \begin{pmatrix} K_{11}t_{11} + K_{12}t_{12} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix},\ \ell = \begin{pmatrix} K_{11}\ell_{11} + K_{12}\ell_{12} \\ \ell_{21} \\ \vdots \\ \ell_{n1} \end{pmatrix} \right\},$$

con $K_{11}, K_{12} \geq 0$, $K_{11} + K_{12} = 1$.

L'insieme $\overline{\Pi}$ sarà composto dai due elementi:

$$t_1 = \left\{ I,\ A_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix},\ \ell_1 = \begin{pmatrix} \ell_{11} \\ \ell_{21} \\ \vdots \\ \ell_{n1} \end{pmatrix} \right\},$$

$$t_2 = \left\{ I,\ A_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix},\ \ell_2 = \begin{pmatrix} \ell_{12} \\ \ell_{21} \\ \vdots \\ \ell_{n1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Si tratta di due tecniche distinte solamente per la struttura produttiva della prima industria ed identiche nelle strutture produttive delle rimanenti n-1 industrie.

In tal caso si può provare che (4):

(xii). Per $r < \min \{R(A_1), R(A_2)\}$ si verifica necessariamente uno di questi tre casi:

$$\left[(I-\rho A_1)^{-1}\ell_1 - (I-\rho A_2)^{-1}\ell_2\right] \begin{cases} \geq 0 \\ = 0 \\ \leq 0 \end{cases} .$$

Essendo $\mu \geq 0, \neq 0$ l'insieme V''_μ definito in (12) deve essere necessariamente vuoto. Di conseguenza l'insieme $V = V'$ risulterà essere indipendente dai valori assunti da μ.

La ricerca dei punti appartenenti all'insieme V' può essere condotta mediante la risoluzione del seguente sistema:

$$(14) \begin{cases} (I-\rho A_1)p - \ell_1 w = 0 \\ \mu p = 1 \\ h p - \ell_{12} w = 0 \end{cases} .$$

ove $h = (1-\rho(t_{12})_1, -\rho(t_{12})_2, \dots, -\rho(t_{12})_n)$.

Sia $0 < \rho < R(A_1)$. Possiamo sostituire la soluzione (9) nella (14):

$$(15) \quad \begin{cases} p = \dfrac{(I-\rho A_1)^{-1}\ell_1}{\mu(I-\rho A_1)^{-1}\ell_1} \\ w = \dfrac{1}{\mu(I-\rho A_1)^{-1}\ell_1} \\ hp - \ell_{12}w = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo le prime $n+1$ equazioni nell'ultima otteniamo:

$$(16) \quad h(I-\rho A_1)^{-1}\ell_1 - \ell_{12} = 0 .$$

Il primo membro della (16) è costituito da un polinomio di grado n in ρ e può quindi ammettere fino ad n radici distinte.

Note,

(1). Per amore di semplicità le osservazioni (viii) e (ix) sono illustrate da esempi concernenti insiemi Π composti da due elementi. Purtuttavia le (viii) e (ix) rimangono valide anche considerando insiemi Π della potenza del continuo.

(2). I grafici nelle tavole da (1) e (4) possono essere considerati come la curva salario di settori integrati ottenuti dalle tecniche t_1 e t_2 per salari materiali dati rispettivamente da $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

Si noti come l'alterazione delle equazioni di una tecnica mediante coefficienti positivi non altera la curva salario data da $w(t,\rho)$.

Infatti, sia D una matrice diagonale tale che $d_{ii}>0$ per $i=1,n$ e sia $S=\{D, DA, De\}$; abbiamo:

$$w(S,\rho)=\frac{1}{\mu(D-\rho DA)^{-1}De}=\frac{1}{\mu[D(I-\rho A)]^{-1}De}=$$

$$=\frac{1}{\mu(I-\rho A)^{-1}D^{-1}De}=\frac{1}{\mu(I-\rho A)^{-1}e}=w(t,\rho).$$

I grafici sono stati elaborati dall'autore presso il centro di calcolo della Osaka City University, Osaka, Giappone.

(3). Le dimostrazioni possono trovarsi nel rif. (3).

(4). La dimostrazione può trovarsi nel rif. (3).

Riferimenti

(1) Debreu G., I.N. Herstein, "Nonnegative Square Matrices" su "Readings in Mathematical Economics" vol. I, Baltimore 1968.

(2) Garegnani P., "Beni capitali eterogenei, la funzione di produzione e la teoria della distribuzione" su "Prezzi relativi e distribuzione del reddito" a cura di Sylos Labini P., Torino 1973.

(3) Lippi, M., "Appunti del corso di Matematica applicata all'economia" Roma, 1973.

(4) Pasinetti, L., "Lezioni di teoria della produzione", Bologna, 1975.

(5) Seneta, E., "Non-negative Matrices", London 1973.

(6) Tucci, M., "Some Mathematical Proposition on the Sraffa Model" su "Osaka City University Economic Review" n. 12, Osaka, 1976.