Disequazioni logaritmiche

Occupiamoci ora della risoluzione di disequazioni logaritmiche del tipo:

$$\log_a x \gtrless b$$

Distinguiamo due casi:

1) $0 < a < 1$
2) $a > 1$

$\boxed{0 < a < 1}$

Dal grafico della figura 6.15, relativo alla curva $y = \log_a x$, ricaviamo che, quali che siano x_1 e x_2, positivi, con $x_1 < x_2$, si ha:

$$0 < x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x_1 > \log_a x_2$$

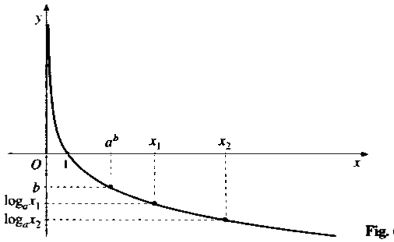

Fig. 6.15

Poiché si può scrivere: $b = \log_a a^b$, la disequazione:

$$\log_a x > b$$

diventa: $$\log_a x > \log_a a^b$$

la quale, se $0 < a < 1$, è verificata per: $$0 < x < a^b$$

mentre la disequazione: $$\log_a x < b$$

se $0 < a < 1$, è verificata per: $$x > a^b$$

$\boxed{a > 1}$

Dal grafico della figura 6.16, relativo alla curva $y = \log_a x$, ricaviamo che, quali che siano x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, si ha:

$$0 < x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Poiché si può scrivere $b = \log_a a^b$, la disequazione:

$$\log_a x > b$$

diventa: $\log_a x > \log_a a^b$

la quale, se $a > 1$, è verificata per:

$$x > a^b$$

mentre la disequazione:

$$\log_a x < b$$

se $a > 1$, è verificata per:

$$0 < x < a^b$$

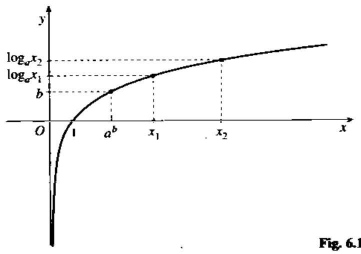

Fig. 6.16

Osservazione 8

Poiché:

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

è possibile trasformare $\log_a x$ in $-\log_{\frac{1}{a}} x$. Per esempio: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-2) = -\log_2(2x-2)$

È quindi sempre possibile ricondursi a disequazioni con base maggiore di 1.

Esempi

13 *Risolviamo la disequazione:* $\log_5 (x-7) > 2$

Poiché: $2 = \log_5 5^2$

si ha: $\log_5 (x-7) > \log_5 5^2$

Quindi: $x - 7 > 5^2$ ossia $x \in]32; +\infty[$

14 *Risolviamo la disequazione:* $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > 3$

Poiché: $3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

si ha: $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

e quindi: $0 < 3x - 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ossia $2 < 3x < \frac{17}{8}$

da cui si ricava: $x \in \left]\frac{2}{3}; \frac{17}{24}\right[$

15 *Risolviamo la disequazione:* $\log_{\frac{1}{2}}(3^{2x} - 3^x + 1) > 0$

Dal grafico riportato nella figura 6.15 ricaviamo che il logaritmo in base $\frac{1}{2}$ è positivo se l'argomento è compreso tra 0 e 1; quindi la disequazione è soddisfatta se:

$$0 < 3^{2x} - 3^x + 1 < 1$$

Posto $3^x = t$, ne deriva:

$$\begin{cases} t^2 - t + 1 > 0 \\ t^2 - t < 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per ogni t, mentre la seconda per $0 < t < 1$; quindi il sistema è soddisfatto per $0 < t < 1$, ossia per $0 < 3^x < 1$.
Poiché $3^x > 0$ per ogni x e $3^x < 1$ per $x < 0$, il sistema è soddisfatto per $x < 0$ e così pure la disequazione logaritmica.